

SOBRE LA ECUACIÓN DE ONDAS

Enrique Cantera del Río

1-Introducción experimental.

2-La solución de la ecuación de ondas en una dimensión.

3-Interpretación física de la solución de la ecuación de ondas.

4-Ondas Estacionarias.

5-El teorema de Fourier y la linealidad de la ecuación de onda.

6-La ecuación de onda en tres dimensiones.

7-Ondas esféricas.

8-Relación entre la ecuación de Laplace y la ecuación de ondas.

9-El principio de Huygens y la difracción.

10-Ondas estacionarias en tres dimensiones.

11-Ondas guiadas.

12-Ondas en la cuerda de una guitarra.

13-Continuidad, Reflexión y Refracción.

14-Ondas en líneas de transmisión eléctrica.

15-Ondas y relatividad especial. Efecto Doppler.

16-Apéndice Matemático.

El muelle sin masa.

Oscilaciones acopladas y sistemas lineales.

Modelo de análisis para las ondas en gases.

Separación de variables de la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas

Fórmula recursiva para los polinomios de Legendre

Generalización de la fórmula para la difracción de Fraunhofer.

Difracción de Fresnel

Zonas de Fresnel y Telecomunicaciones.

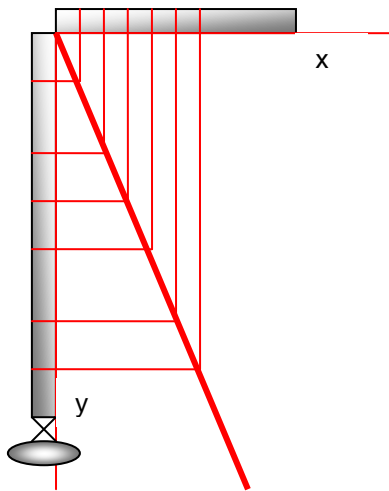
La serie de Fourier

La transformada de Fourier

La serie de Fourier y la delta de Dirac.

Los potenciales retardados de una carga puntual

1-Introducción experimental.



Para esta experiencia el lector necesita un panel vertical con corcho sobre el que pueda dibujar y clavar chinchetas. Varias bandas elásticas iguales, en el dibujo en gris, y varios pesos u otros objetos con la misma masa conocida, en el dibujo la elipse gris. Es conveniente que las bandas sean de masa despreciable respecto de los pesos aplicados.

Tome una banda elástica y extiéndala, sin forzarla, sobre el eje x desde el origen de coordenadas marcando con un bolígrafo, en dicha banda y en el propio eje x, varios puntos de referencia. Después colocamos la banda sobre el eje y, sometiéndola a tensión con un peso conocido tal como aparece en el dibujo.

Marcamos los puntos de la banda en el eje y. Si unimos los puntos correspondientes como si fueran los valores de una función $y(x)$ en coordenadas cartesianas, veremos que, mientras se mantenga el comportamiento elástico, la función $y(x)$ corresponde a una línea recta que pasa por el origen. Podemos expresar esta función así:

$$y(x) = x + \xi(x) = x \tan(a) \equiv \xi(x) = (\tan(a) - 1)x$$

donde $\xi(x)$ representa el desplazamiento experimentado por el punto x de la banda no sometida a tensión. En términos diferenciales, eliminamos la necesidad de un origen de coordenadas determinado:

$$\frac{\partial \xi(x)}{\partial x} = A = \tan(a) - 1$$

El siguiente paso es determinar la *dependencia* del valor A, constante para una experiencia determinada. Podemos proceder así: Si tomamos como peso el doble del caso anterior, tendremos que el desplazamiento $\xi(x)$ será mayor y por tanto en valor A aumentará; luego A depende directamente de la fuerza aplicada a la banda. Por otra parte, si el peso doble lo aplicamos a un conjunto de dos bandas iguales, los desplazamientos $\xi(x)$ serán iguales que en el caso de un peso unidad y una única banda. Para que esto sea cierto las secciones transversales de cada banda deben soportar la misma fuerza; la fuerza por unidad de superficie o *presión* debe ser homogénea en toda la sección transversal. Por tanto tenemos que

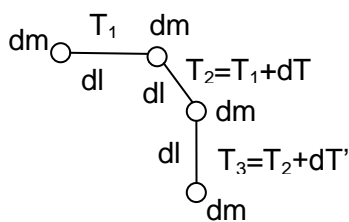
$$Y \frac{\partial \xi(x)}{\partial x} = \frac{F}{S}$$

donde la constante Y, conocida como *módulo de Young*, es una constante que ajusta las unidades de la ecuación y que depende del material del que esté hecha la banda y de la temperatura. La ley de *Hooke* se puede obtener a partir de la expresión anterior

$$F = YS \frac{\partial \xi(x)}{\partial x} = \frac{YS}{\Delta x_0} \Delta \xi_0 = k \Delta \xi_0; \quad \Delta x_0 = l_{banda}; \quad k = \frac{YS}{l_{banda}}$$

donde, dado que en *condiciones de equilibrio estático* la derivada es constante e independiente de x , hemos calculado la derivada por medio de la longitud de la banda en ausencia de tensión (Δx_0) y el desplazamiento correspondiente del extremo de la banda ($\Delta \xi_0$).

La mecánica clásica permite una ampliación de estos resultados estáticos a un caso dinámico. Para ello podemos partir del modelo mecánico de una cuerda tensa. Las cuerdas sin masa, utilizadas extensamente en los problemas de mecánica básica, se caracterizan por un valor único del módulo de la tensión en toda la cuerda; o en su caso en la parte de ella que no transfiera energía, a una polea u otro objeto. Pero si consideramos la masa de la cuerda, entonces el módulo de la tensión ya no es



constante y varía a lo largo de la cuerda. El modelo mecánico es el que refleja el dibujo adjunto, donde la cuerda se descompone en elementos de masa dm conectados por cuerdas ideales sin masa de longitud constante (no varía en el tiempo) dl y sometidas a una tensión que varía de un tramo a otro. La diferencia de tensiones a los dos lados de un elemento dm provocará la

aceleración de dicho elemento según la segunda ley de Newton. En el caso de nuestra banda elástica las longitudes dl no se mantienen constantes en una situación dinámica, a diferencia del caso de la cuerda que mantiene constante su longitud; y las tensiones entre elementos de masa corresponden a la ley de Hooke. Si ampliamos el planteamiento a una situación no estática unidimensional el desplazamiento (elongación) asociado a cada punto de la banda dependerá también del tiempo $\xi(x,t)$. Tomemos en un instante t dado dos segmentos de banda contiguos, tan pequeños como queramos, centrados en los puntos estáticos x y $x+dx$. El análisis de equilibrio anterior consideraba que la masa de la banda es esencialmente despreciable, por lo que debemos introducir una *masa puntual* dm que conecta nuestros segmentos elementales, que consideraremos también de sección elemental dS . En una situación no estática debemos aceptar que la fuerza F no es igual en cualquier punto de la banda; de modo que en los extremos de los segmentos elementales la fuerza exterior, que conecta un elemento con otro, no está compensada y debe producirse la *aceleración* de la masa puntual correspondiente. Con el modelo dinámico descrito, podemos utilizar el resultado estático anterior para nuestros dos segmentos diferenciales contiguos:

$$Y \frac{\partial \xi(x,t)}{\partial x} = \frac{F(x,t)}{dS}$$

$$Y \frac{\partial \xi(x+dx,t)}{\partial x} = \frac{F(x+dx,t)}{dS} = \frac{F(x,t) + dF}{dS}$$

restando y considerando que, en un instante t determinado, la fuerza no compensada dF debe acelerar la masa elemental situada entre los segmentos, y que tal aceleración se puede expresar con la función $\xi(x,t)$

$$Y \frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial x^2} dx = \frac{dF}{dS} = \frac{dm}{dS} \frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial t^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\rho_0}{Y} \frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial t^2}; \rho_0 = \frac{dm}{dS dx}$$

tomando dm como la masa contenida en el segmento dx de la banda no sometida a tensión, entonces ρ_0 representa la densidad en volumen de la banda elástica no

sometida a tensión. El resultado corresponde a una ecuación de ondas longitudinales asociada al desplazamiento de cada punto respecto a su posición de equilibrio de la banda con una *velocidad de onda* de valor

$$c = \sqrt{\frac{Y}{\rho_0}}$$

Hay que decir que la ecuación de ondas deducida, y por tanto la velocidad de onda, está asociada a un observador inercial para el cual la banda, cuando no está sometida a tensión, está completamente en reposo. De hecho esta banda en equilibrio estático (reposo) se confunde con el sistema de coordenadas del observador. El modelo mecánico utilizado se puede ampliar fácilmente al caso de ondas en gases, como se muestra en el apéndice.

2-La solución de la ecuación de ondas en una dimensión.

$$\frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial t^2}$$

La ecuación anterior puede factorizarse de esta forma

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \xi(x,t) = 0$$

Lo cual sugiere soluciones de la forma $F(x+ct)+G(x-ct)$. Es posible demostrar que la expresión anterior es la solución general para esta ecuación. Si hacemos el siguiente cambio de variables

$$\mu = x + ct \quad ; \quad \eta = x - ct$$

Las derivadas parciales se transforman así

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \xi(\mu, \eta) &= \frac{\partial \xi}{\partial \mu} \frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial \mu} + \frac{\partial \xi}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial t} \xi(\mu, \eta) &= \frac{\partial \xi}{\partial \mu} \frac{\partial \mu}{\partial t} + \frac{\partial \xi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = c \left(\frac{\partial \xi}{\partial \mu} - \frac{\partial \xi}{\partial \eta} \right) \end{aligned}$$

la segunda derivada es

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial x} \xi(\mu, \eta) \right] &= \frac{\partial}{\partial \mu} \left[\frac{\partial \xi}{\partial \mu} + \frac{\partial \xi}{\partial \eta} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{\partial \xi}{\partial \mu} + \frac{\partial \xi}{\partial \eta} \right] \\ \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial}{\partial t} \xi(\mu, \eta) \right] &= c^2 \left(\frac{\partial}{\partial \mu} \left[\frac{\partial \xi}{\partial \mu} - \frac{\partial \xi}{\partial \eta} \right] - \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{\partial \xi}{\partial \mu} - \frac{\partial \xi}{\partial \eta} \right] \right) \end{aligned}$$

y sustituyendo en la ecuación de ondas

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial \xi}{\partial \mu} \right) = 0$$

cuya solución general es, tal como indicamos antes

$$\boxed{\frac{\partial \xi}{\partial \mu} = f(\mu); \Rightarrow \xi(x,t) = \int f(\mu) d\mu + G(\eta) \equiv F(x+ct) + G(x-ct)}$$

3-Interpretación física de la solución de la ecuación de ondas.

Podemos observar una de las componentes, F o G, en el instante t=0 en el plano (ξ,x) como una función arbitraria , por ejemplo

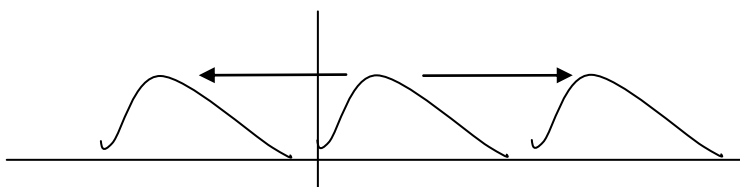


Para cualquier otro instante t y cualquier otra posición x podemos hacer la relación con coordenadas x en el instante t=0 para las funciones F y G así

$$x_0^F = x + ct \Rightarrow F(x_0^F, 0) = F(x, t)$$

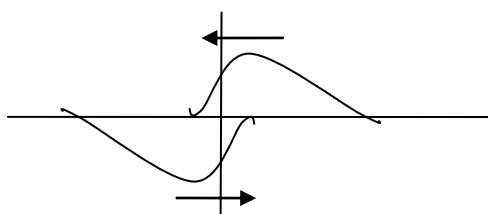
$$x_0^G = x - ct \Rightarrow G(x_0^G, 0) = G(x, t)$$

Lo que permite visualizar la primera componente F como el desplazamiento del “objeto” $F(x,0)$ sobre el eje x a velocidad $-c$: $x = -ct + x_0$. Análogamente la segunda componente G corresponde al desplazamiento del “objeto” $G(x,0)$ sobre el eje x a velocidad c : $x=ct + x_0$.



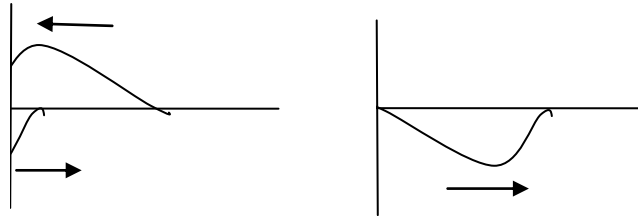
De esta forma vemos que las dos componentes son ondas viajeras que representan el movimiento de una perturbación capaz de mantener una forma reconocible.

Tomemos el caso del que partimos con una banda elástica de la que cuelga un peso .Partiendo de una situación de reposo, podemos estirar levemente hacia abajo el peso. Si cesamos la fuerza el peso experimentará un movimiento oscilatorio igual al caso clásico del movimiento del muelle. Según nuestros resultados durante este movimiento es aplicable a la banda (o muelle) la ecuación de ondas. Pero si probamos como solución una de las funciones posibles, bien sea $F(x+ct)$ o $G(x-ct)$, veremos que no pueden representar por si solas la física del problema. Si nos fijamos, en el punto de contacto de la banda con el techo *el estiramiento ξ es siempre nulo para cualquier instante de tiempo*. Esto no es lo que se espera de una onda viajera que pase por ese punto : puede anularse en algunos instantes o en algunos intervalos de tiempo, pero *no siempre*. Según la lógica, si una de las funciones F, G no puede darnos una solución entonces debemos recurrir a la solución completa $F(x+ct)+G(x-ct)$. Si el punto de contacto con el techo señalado corresponde con la coordenada $x=0$, las funciones



F y G deben verificar la siguiente relación funcional $F(u)+G(-u)=0$. Lo que indica que, en nuestra visión geométrica, las funciones F y G están giradas 180 grados en el plano (ξ,x) respecto del origen de coordenadas y se mueven, a la misma velocidad y en sentidos contrarios. La representación anterior

muestra que es posible una solución en la que el estiramiento, es decir, la suma $F+G$, sea nula permanentemente en $x=0$. Evidentemente a la izquierda del eje vertical hay una pared, o en general un objeto rígido y de masa muy elevada y no existe la onda en esta parte del espacio. Sin embargo el efecto de esta pared o objeto muy masivo en lo que respecta a la cuerda es absorber la onda incidente y transformarla en una onda reflejada sobre la misma cuerda



El carácter masivo y rígido de la pared hace que la onda incidente no pueda provocar desplazamientos internos en dicha pared y la energía que transporta la onda deba ser reflejada en forma de *onda rebotada* hacia la misma cuerda. El lector puede comprobar este comportamiento si dispone de una cuerda gruesa. Si atamos la cuerda a un extremo fijo y sacudimos el otro extremo podemos ver la onda o pulso moviéndose por encima de la línea de la cuerda. Al llegar la onda al extremo fijo la onda rebota en forma de un pulso que se mueve por debajo de la línea de la cuerda. En este caso tenemos una onda transversal en vez de longitudinal como en el caso de la banda elástica, pero la ecuación de ondas es igualmente aplicable.

Siguiendo con el caso de la banda elástica, el movimiento oscilatorio del sistema se puede mantener indefinidamente si fuésemos capaces de eliminar las pérdidas de energía por rozamiento o calentamiento interno. Según la literatura habitual, el movimiento de la masa sujeta al extremo de la banda puede describirse así

$$F = m \frac{d^2 x}{dt^2} = m \frac{d^2 \xi}{dt^2} = -k\xi \Rightarrow x = x_i + \xi_{\max} \cos(\omega t)$$

$$\Rightarrow \xi = x - x_i = \xi_{\max} \sin(\omega t) \quad ; \quad \omega = \sqrt{k/m}$$

Es decir, la posición de la masa es la suma de la posición inicial x_i de la masa m sin tensión en la banda y de la elongación de la banda elástica en este punto, siendo ξ_{\max} la elongación máxima en x_i . Si no se dan mas explicaciones, es evidente que la solución anterior no es correcta, ya que para $m=0$ se predice una frecuencia infinita para la oscilación de la banda o muelle libre; cosa que evidentemente no ocurre. Por otra parte en el resultado anterior hemos combinado la ley de Hooke, esencialmente estática, con la 2ª ley de Newton, esencialmente dinámica. El resultado encontrado es válido, como veremos, en un margen en que la *masa de la banda sea despreciable¹ frente a la masa de la bola (m)*; y para el extremo de la banda que ocupa dicha bola. Sin embargo note el lector que podemos analizar el movimiento de un punto de la banda que no sea el punto extremo utilizando este mismo resultado si suponemos que $k(x)$ se mantiene constante y la masa de la banda despreciable. De esta forma podemos apuntar a una solución general para la elongación de la banda con esta forma

¹ ver apéndice *El muelle sin masa*

$$\xi = \xi_{\max}(x) \cos(\omega t)$$

Donde, para el caso del punto de la banda en contacto permanente con la pared la elongación de dicho punto debe ser siempre nula y por tanto $\xi_{\max}(0)=0$; ya que dicho punto no puede moverse y mantener el contacto con la pared. Recuperando el análisis ondulatorio previo, deben ser compatibles las siguientes ecuaciones

$$\xi(x,t) = F(x+ct) + G(x-ct) = \xi_{\max}(x) \cos(\omega t); \quad \xi_{\max}(0) = 0; \quad F(-u) + G(u) = 0$$

Si elegimos para F y G una función seno o coseno de la misma amplitud A ($G=F=\text{seno}()$ para x función de $\cos(\omega t)$ ó $G=\text{coseno}()$ y $F=-\text{coseno}()$ para x función de $\sin(\omega t)$), podemos ver rápidamente, utilizando las fórmulas del seno/coseno de una suma/diferencia, lo siguiente

$$\begin{aligned} \xi(x,t) &= A \sin(K(x+ct)) + A \sin(K(x-ct)) = 2A \sin(Kx) \cos(\omega t); \quad \omega = Kc \\ \Rightarrow \xi_{\max}(x) &= 2A \sin(Kx) \end{aligned}$$

El valor K (mayúscula) se introduce para que el argumento del seno sea adimensional (radianes), y tiene por tanto unidades de inversa de la longitud. K está definido completamente a partir de la frecuencia de oscilación y la velocidad de propagación de las ondas: $w=Kc$. Es evidente que este parámetro corresponde con el vector de ondas de una onda senoidal: $K=2\pi/\lambda$, donde λ es la longitud de onda. Pero la solución anterior es una solución exacta de la ecuación de ondas y en principio puede corresponder a un caso real. Sin embargo, en la ecuación dinámica de Newton hemos utilizado una aproximación cuasiestática para que el valor del parámetro elástico k se pueda considerar constante. Matemáticamente la primera aproximación es el valor constante de la siguiente derivada

$$\frac{\partial \xi_{\max}(x)}{\partial x} = \frac{\xi_{\max}(l_{\text{banda}})}{l_{\text{banda}}} = cte$$

Si aplicamos esta condición a la solución obtenida tenemos

$$\frac{\partial \xi_{\max}(x)}{\partial x} = 2AK \cos(Kx)$$

Supuestos A y K constantes, para aproximar la derivada a una constante es necesario que sea $Kx \approx 0$ para todo punto x de la banda sin tensión, de modo que el coseno sea aproximadamente 1, es decir

$$Kx \approx 0 \rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} l_{\text{banda}} \approx 0 \rightarrow \lambda \gg l_{\text{banda}}$$

La longitud de onda debe ser mucho mayor que la longitud de la banda en reposo. (Esta aproximación es análoga al caso de los circuitos de corriente alterna y las ondas electromagnéticas-ver apéndice) Si utilizamos la definición de K tenemos

$$Kl_{\text{banda}} = \frac{\omega}{c} l_{\text{banda}} = \sqrt{\frac{k}{m}} \sqrt{\frac{\rho_0}{Y}} l_{\text{banda}} = \sqrt{\frac{YS}{m l_{\text{banda}}}} \frac{\rho_0}{Y} l_{\text{banda}} = \sqrt{\frac{\rho_0 S l_{\text{banda}}}{m}} = \sqrt{\frac{m_{\text{banda}}}{m}}$$

Y por tanto la aproximación considerada es equivalente a $m_{banda} \ll m$, es decir, la masa de la banda debe ser muy inferior a la masa de la bola. Haciendo la parcial respecto al tiempo en la solución encontrada, vemos que existe un instante en el que la velocidad de todos los puntos de la banda se anula

$$\frac{\partial}{\partial t} \xi(x,t) = -\omega \xi_{\max}(x) \sin(\omega t) = 0 \Rightarrow \omega t = n\pi \rightarrow \frac{2\pi}{T} t = n\pi \Rightarrow t = n \frac{T}{2}$$

Donde T es el periodo de oscilación, es decir, el tiempo que tarda la bola en recuperar una posición y velocidad dadas. Por tanto, cada semi-periodo se produce una situación de *velocidad nula para todos los puntos de la banda elástica, incluida la masa de la bola*. Podemos ver también que, en estos instantes, la elongación de la banda ξ es máxima o mínima. Desde el punto de vista energético, en estos instantes la energía cinética del sistema es nula y por tanto la energía del sistema debe estar acumulada totalmente en forma de energía potencial elástica; lo cual indica que en estos instantes la longitud de la banda es máxima o mínima. Por tanto y dentro de nuestra aproximación, aplicando la fórmula de la energía potencial elástica tenemos

$$E = \frac{1}{2} k (\xi_{\max}(l_{banda}))^2 \Rightarrow \xi_{\max}(l_{banda}) = 2A \sin(Kl_{banda}) = \sqrt{\frac{2E}{k}} \approx 2AKl_{banda}$$

Donde E es una constante correspondiente a la energía mecánica del sistema. Dado que podemos conocer los valores de E, K, k y l_{banda} ; podemos calcular el valor de la amplitud de onda A de la expresión anterior y otros resultados obtenidos

$$\sqrt{\frac{2E}{k}} \approx 2A \sqrt{\frac{m_{banda}}{m}} \Rightarrow A \approx \sqrt{\frac{mE}{2km_{banda}}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m}{m_{banda}}} \xi_{\max}(l_{banda})$$

En 2ª aproximación : modificación de la frecuencia de oscilación debido a la masa del muelle o banda elástica.

A partir del campo de elongaciones ξ encontrado, podemos calcular la fuerza sobre la masa conectada al extremo recordando el desarrollo hecho en la introducción.

Tomando módulos tenemos

$$\|F_{extremo}\| = \left\| YS \frac{\partial \xi(x,t)}{\partial x} \right\|_{extremo} = \left\| m \frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial t^2} \right\|_{x=l_{banda}} \Rightarrow \tan(Kl_{banda}) = \frac{YSK}{m\omega^2}$$

Eliminando K con $\omega = Kc$ y aplicando $c^2 = Y/\rho_0$; ambas relaciones asociadas al fenómeno ondulatorio, tenemos

$$\frac{\omega l_{banda}}{c} \tan\left(\frac{\omega l_{banda}}{c}\right) = \frac{m_{banda}}{m}$$

Y para pequeños valores del argumento de la tangente (equivalente a Kl_{banda})

$$\frac{\omega l_{banda}}{c} \left[\frac{\omega l_{banda}}{c} + \frac{1}{3} \left(\frac{\omega l_{banda}}{c} \right)^3 + \dots \right] = \frac{m_{banda}}{m} \Rightarrow$$

$$\left(\frac{\omega l_{banda}}{c} \right)^2 \left[1 + \frac{1}{3} \left(\frac{\omega l_{banda}}{c} \right)^2 + \dots \right] = \frac{m_{banda}}{m} ; m_{banda} = \rho_0 S l_{banda}; c^2 = Y / \rho_0; k = \frac{YS}{l_{banda}}$$

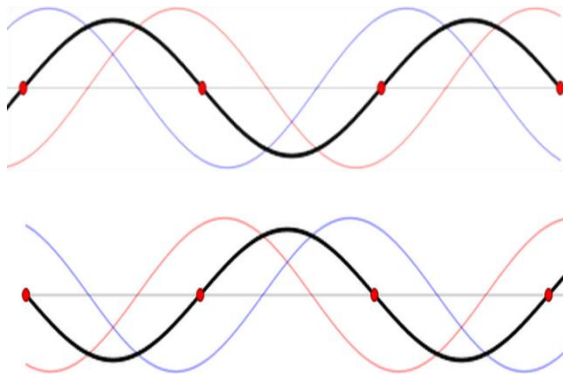
Aproximando la ecuación de 2º grado hasta segundo orden en m_{banda}/m y aplicando las relaciones indicadas, deducidas previamente, obtenemos una aproximación más refinada de la frecuencia de oscilación que incluye la masa de la banda o muelle

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m + \frac{1}{3} m_{banda}}}$$

4-Ondas Estacionarias.

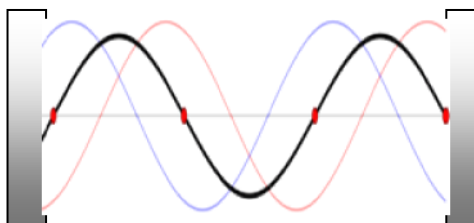
Hasta ahora hemos estudiado una solución de la ecuación de ondas pero restringida a un caso particular con la aproximación $\lambda \gg l_{banda}$. Si analizamos la solución encontrada en un rango mayor llegamos al comportamiento descrito en las siguientes imágenes. Si suponemos que la onda roja y la azul son ondas senoidales con la misma amplitud y se desplazan en sentidos contrarios la suma de las dos corresponde a la expresión

$$\xi(x,t) = 2A \sin(Kx) \cos(\omega t) = \xi_x(x) \xi_t(t)$$



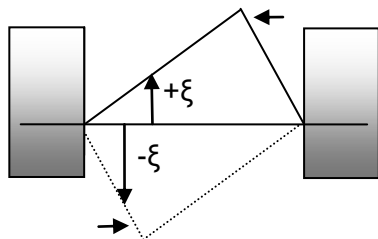
Vemos inmediatamente que los puntos x que verifican $Kx = n\pi$ ($n=0,1,2,3,4\dots$) se mantienen inmóviles en su posición, ya que para ellos $\xi(x,t) = 0$. A estos puntos característicos se les denomina *nodos*. De igual forma, como hemos visto, también existen instantes de tiempo en los que la velocidad de todos los puntos afectados por el proceso ondulatorio se anula. Estas características nos informan

que el proceso ondulatorio que se está dando corresponde a una onda estacionaria. Estas ondas estacionarias se producen normalmente en condiciones de confinamiento espacial del proceso ondulatorio. En nuestro caso es evidente que las ondas elásticas se producen en una zona acotada del espacio, ya que el medio elástico no es infinito y no pueden alargarse o comprimirse arbitrariamente; a riesgo de perder sus propiedades elásticas o romperse. En el desarrollo que hemos hecho, partimos de una solución general $F(x+ct)+G(x-ct)$ que en principio no está acotada. Eligiendo una función *senoidal* F y G hemos visto que podemos reproducir el comportamiento de un nodo, es decir, de un punto fijo. Sin embargo vemos que aparecen también múltiples puntos fijos en la banda, de modo que podríamos conectar la banda



a una pared rígida en alguno de estos puntos y la solución aún sería válida. De esta forma las ondas rebotan en las dos paredes a las que está conectada la banda elástica o muelle.

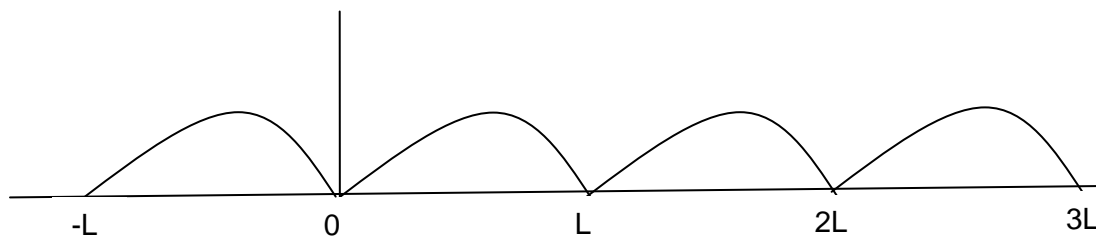
Dado que la ecuación de onda no especifica una función determinada como solución, sino más bien una forma funcional, hemos estado utilizando funciones sinodales con la ventaja de conocer todas sus propiedades. Sin embargo las funciones de onda en el muelle o banda elástica pueden ser diferentes.



Imaginemos un muelle anclado entre las dos paredes señaladas antes. Desde el estado de reposo cogemos el punto medio del muelle y lo desplazamos ligeramente a la derecha. El campo de desplazamientos generado $+\xi$ tendrá la forma del dibujo adjunto. A la izquierda del punto en que aplicamos la

fuerza hay un estiramiento y a la derecha hay una compresión del muelle o banda elástica. Si liberamos el muelle, será la forma funcional dibujada la que se desplace hacia la izquierda, rebote en la pared, continúe hacia la derecha y rebote hasta la pared opuesta, y así periódicamente si no hay pérdidas de energía. En la posición inicial *habrá* una cierta cantidad de energía acumulada como energía potencial. Al liberar el muelle se transforma en energía cinética al principio y posteriormente la velocidad disminuye volviéndose a acumular la energía potencial hasta una posición límite simétrica a la inicial respecto al punto medio; como muestra el campo de desplazamientos $-\xi$ en línea punteada.

5-El teorema de Fourier y la linealidad de la ecuación de onda.



Consideremos una función $\xi(x)$ de una variable, periódica y de periodo L , por lo demás arbitraria, como se ve en el dibujo adjunto. Para esta función es válido el *Teorema de Fourier*, según el cual se puede aproximar dicha función, tanto como queramos, por medio de una serie infinita de sumas de senos y cosenos de *periodo L* de esta forma

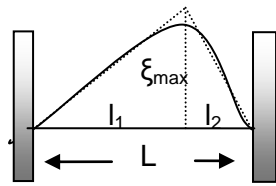
$$\xi(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \sin\left(\frac{2n\pi}{L}x\right) + b_n \cos\left(\frac{2n\pi}{L}x\right) \right]$$

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_0^L \xi(x) dx ; a_n = \frac{2}{L} \int_0^L \xi(x) \sin\left(\frac{2n\pi}{L}x\right) dx ; b_n = \frac{2}{L} \int_0^L \xi(x) \cos\left(\frac{2n\pi}{L}x\right) dx$$

Podemos aplicar esto al caso de la perturbación en el campo de desplazamientos que hemos creado en el muelle, siendo L la distancia, fija, entre las dos paredes en que están anclados los extremos del muelle. El teorema de Fourier nos da una

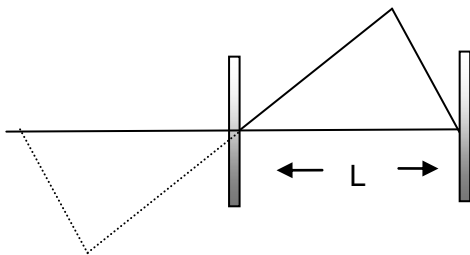
aproximación a la forma de la función en el intervalo $[0, L]$ en términos de una suma de ondas sinodales que ya conocemos y una constante a_0 adicional correspondiente al valor medio de la función analizada en el periodo $[0, L]$. Dependiendo de la forma de la onda, serán necesarios más o menos términos de la serie de Fourier para conseguir una aproximación con un error cuadrático medio menor que un valor dado. En particular, si la función tiene un vértice como en el caso que hemos visto antes, entonces son necesarios muchos más términos de la serie para conseguir una aproximación dada.

En la última parte de la sección anterior vimos el caso de desplazar ligeramente el centro del muelle. Note el lector que el punto donde aplicamos la fuerza representa un vértice en el campo de desplazamientos en el que la derivada $\partial\xi/\partial x$ es discontinua por



ser diferente la pendiente a un lado y otro de este punto; y la derivada segunda $\partial^2\xi/\partial x^2$ no está bien definida en el mismo punto; con lo cual la ecuación de ondas no sería completamente aplicable. Sin embargo, la serie de Fourier permite aproximar $\xi(x)$ tanto como queramos (en términos de

ajuste de curvas por mínimos cuadrados) por medio de una serie infinita senos y cosenos; es decir, por aproximaciones sucesivas de funciones continuas y derivables en cualquier orden. Cuantos más términos de la serie tengamos la aproximación será más precisa y existe un valor "n" para el que la contribución del resto de términos (infinitos términos) podrá considerarse despreciable. Esto es análogo al concepto de *ancho de banda* en la transmisión de señales de comunicaciones. De esta forma la serie de Fourier permite aproximar funciones arbitrarias en un intervalo acotado de la variable independiente que presenten algún tipo de discontinuidad no esencial (que no tome valores infinitos) en el valor de la función o de sus derivadas. Estas aproximaciones se realizan por medio de funciones analíticas, continuas, derivables y



con derivadas continuas en cualquier orden. Este planteamiento de las series de Fourier es muy distinto al de la serie de Taylor. Sin embargo debemos notar una discrepancia entre el análisis de Fourier de $\xi(x)$ y la dinámica de ondas estacionarias planteada en la sección 4. Las componentes funcionales del teorema de Fourier son senos/cosenos de periodo espacial L/n con

$n=1,2,3,\dots$ pero en la sección 4 vimos que existen ondas estacionarias de periodo $2L$; o lo que es lo mismo, *de semiperiodo L*. Para que la serie de Fourier sea de utilidad en este caso debemos ampliar el campo $\xi(x)$ según la figura adjunta y calcular la serie de Fourier de la función ampliada de periodo $2L$. Reconocemos en la parte izquierda del campo de desplazamientos ampliado la contribución de la *onda rebotada*. Es fácil ver que los coeficientes a_0 y b_n se anulan en este caso por ser el campo de desplazamientos una función impar $\xi(-x) = -\xi(x)$; con lo que solo quedan las componentes senoidales. Los coeficientes de la serie de Fourier se pueden calcular en nuestro caso como

$$\xi(x) = \begin{cases} \alpha x; & 0 < x < l_1 \\ \beta(L-x); & l_1 < x < L \\ \xi(-x) = -\xi(x) \end{cases} \quad a_n = 2 \left[\frac{2}{2L} \left[\alpha \int_0^{l_1} x \sin\left(\frac{2n\pi}{2L}x\right) dx + \int_{l_1}^L \beta(L-x) \sin\left(\frac{2n\pi}{2L}x\right) dx \right] \right]$$

$$a_n = \frac{2}{L} \left[\alpha \int_0^{l_1} x \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx + \beta \int_{l_1}^L (L-x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \right]; \quad \xi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

Donde α y β se pueden calcular geoméricamente como $\alpha = \xi_{max}/l_1$, $\beta = \xi_{max}/l_2$; pero dependen físicamente de las tensiones iniciales en los lados l_1 y l_2 del muelle. El problema espacial que hemos planteado nos ofrece el valor $\xi_{max}(x)$ de cada componente ondulatoria y puede completarse con la parte temporal. Para ello recordemos que el proceso de rebote que efectúa cada componente ondulatoria es independiente del resto, ya que no hay intercambio de energía entre componentes. Cada componente también debe verificar la ecuación de ondas; por tanto el campo $\xi(x,t)$ será de la forma

$$\xi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{L}ct\right); \quad a_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{L}ct\right) = \frac{a_n}{2} \left[\sin\left(\frac{n\pi}{L}(x-ct)\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{L}(x+ct)\right) \right]$$

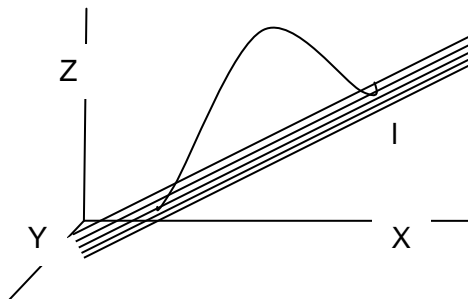
La función $\xi(x)$ corresponde a una perturbación inicial que podemos provocar en el campo de desplazamientos del muelle y que puede ser arbitraria. En concreto si elegimos la perturbación

$$\xi(x) = A \sin(Kx); \quad K = \frac{\pi}{L}$$

Podemos comprobar que corresponde al término $n=1$ de la serie de Fourier, de modo que el coeficiente a_1 no se anula y el resto de coeficientes es nulo. De hecho esta forma funcional es la que hemos utilizado en el análisis de la sección anterior donde hablamos de las ondas estacionarias. De este modo, si excitamos inicialmente el muelle con el campo de desplazamientos senoidal anterior, esta forma se desplaza en el muelle de modo que los rebotes de la onda provocaran la aparición de los nodos propios de la onda estacionaria. El apéndice incluye una ampliación sobre la serie de Fourier.

6-La ecuación de onda en tres dimensiones.

La imagen representa una banda elástica o muelle en la dirección I. La banda se



representa como un conjunto de fibras elásticas. La curva representa un campo de desplazamiento elástico común de todas las fibras. También se representa un sistema de coordenadas cartesiano en sus ejes X,Y,Z. La ecuación de ondas unidimensional que hemos visto corresponde en este contexto a

$$\frac{\partial^2 \xi(l,t)}{\partial l^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi(l,t)}{\partial t^2}$$

Es decir, la variable espacial relevante corresponde a medidas hechas sobre la dirección l y el campo de desplazamiento es el mismo para todas las fibras. Este planteamiento no está en conflicto con el planteamiento experimental al inicio de este trabajo.

Es evidente que dado un punto (x,y,z) este identifica una sola fibra y un valor de $l(x,y,z)$ dentro de dicha fibra. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que el origen de la fibra central de la banda coincide con el origen de coordenadas. En este caso, si k designa ahora un vector unitario adimensional en la dirección de las fibras, se verifica

$$l(x, y, z) = (k_x, k_y, k_z) \bullet (x, y, z) = \bar{k} \bullet \bar{r}$$

Es decir, dado un valor x,y,z dentro de la banda, el valor de l para la fibra correspondiente está dado por la expresión anterior. Dado que el campo de desplazamientos es el mismo para todas las fibras, es decir, vale lo mismo para cualesquiera dos fibras en dos puntos con el mismo valor l , podemos introducir el campo $\xi(l(x,y,z),t)$. Partiendo de este campo podemos expresar la ecuación de ondas en 3 dimensiones utilizando la regla de la cadena de derivadas:

$$\frac{\partial \xi(l(x, y, z), t)}{\partial x} = \frac{\partial \xi(l, t)}{\partial l} \frac{\partial l(x, y, z)}{\partial x} = \frac{\partial \xi(l, t)}{\partial l} k_x$$

Dado que k_x es constante, una segunda derivación resulta en

$$\frac{\partial^2 \xi(l(x, y, z), t)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial l} \left[\frac{\partial \xi(l, t)}{\partial l} k_x \right] \frac{\partial l(x, y, z)}{\partial x} = \frac{\partial^2 \xi(l, t)}{\partial l^2} k_x^2$$

Repetiendo esto para las coordenadas y,z y sumando tenemos

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \xi(l, t)}{\partial l^2} [k_x^2 + k_y^2 + k_z^2] = \frac{\partial^2 \xi(l, t)}{\partial l^2}$$

Ya que k es un vector unitario. En total la ecuación de ondas en tres dimensiones resulta ser

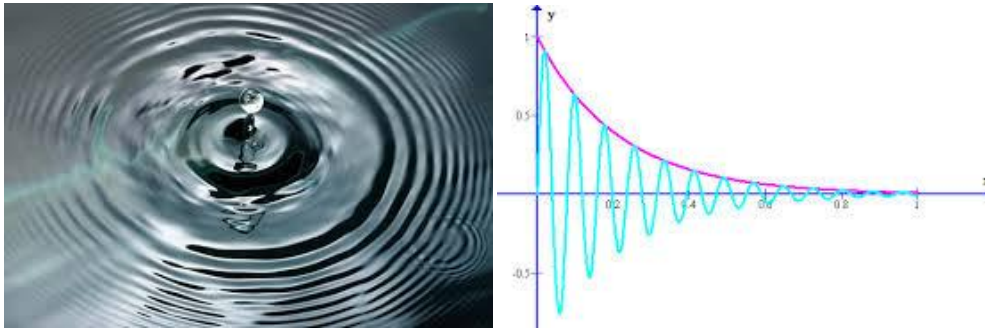
$$\boxed{\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \equiv \nabla^2 \xi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}; \xi(x, y, z, t)}$$

El proceso ondulatorio que hemos supuesto en el volumen de la banda elástica para deducir esta ecuación se denomina *onda plana*, ya que en un instante determinado todos los puntos de la banda en un *plano*, perpendicular a la banda en este caso, tienen el mismo valor de ξ . Las ondas planas se pueden apreciar experimentalmente en otras experiencias como la cubeta de ondas. Sin embargo la ecuación final la suponemos válida para un campo $\xi(x,y,z,t)$ arbitrario, no solo para una onda plana.

Note el lector que la ecuación diferencial obtenida es válida en cualquier sistema de coordenadas. Podemos generalizar la solución del caso unidimensional al caso tridimensional, pero solo para ondas planas

$$\xi(x, y, z, t) = F(\bar{k} \bullet \bar{r} - ct) + G(\bar{k} \bullet \bar{r} + ct) ; \bar{k} \text{ vector unitario}$$

7-Ondas esféricas.



La imagen corresponde a la caída de una gota de agua en la superficie de un estanque con agua en reposo. Las modificaciones de presión producidas se transmiten en forma de onda circular desde el centro. En la superficie del agua aparecen crestas y valles que siguen un patrón similar al de la gráfica de la derecha tomado sobre una línea radial (x) que representa el nivel inicial del agua; de modo que a medida que la distancia al centro aumenta las crestas y valles van siendo menos pronunciados respecto del nivel inicial del agua. Con el tiempo la energía se va distribuyendo en áreas más y más grandes, de modo que el desplazamiento provocado por la onda, la cual se propaga de forma homogénea en todas las direcciones sobre la superficie del agua desde el centro de impacto, va siendo cada vez más pequeño hasta hacerse despreciable. En este caso no aparecen condiciones de contorno ni ondas estacionarias. No existe un límite físico en el que el agua esté obligada a permanecer en reposo frente a la onda impactante. Esto es fácil de ver si generamos la onda en un recipiente casero : el agua en los bordes también oscila y no hay una forma sencilla de hacer que permanezca en reposo.

Según lo anterior, el patrón ondulatorio sería una función de la forma $\xi(r,t)$, donde ξ representa la altura del agua sobre el nivel inicial y r la distancia al centro de impacto. Todas las direcciones respecto del centro se comportan de forma simétrica. El caso descrito es un fenómeno ondulatorio en dos dimensiones que nos va a permitir hacer un test de la ecuación de onda en tres dimensiones de la sección anterior.

Dada la dependencia funcional, podemos expresar el *operador Laplaciano* de la ecuación de onda en coordenadas esféricas con centro el punto de impacto y aplicar la ecuación de ondas de esta forma

$$\frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right] \right) \xi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \Rightarrow \left(\frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) \xi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

Si multiplicamos toda la expresión por r , según las propiedades de las derivadas parciales tenemos

$$\left(2 \frac{\partial}{\partial r} + r \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) \xi = \frac{\partial^2 (r\xi)}{\partial r^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 (r\xi)}{\partial t^2}$$

Con lo que obtenemos la ecuación de ondas unidimensional para el campo $r\xi$ y por tanto la solución general de la ecuación es

$$r\xi(r,t) = F(r-ct) + G(r+ct) \Leftrightarrow \xi(r,t) = \frac{1}{r} [F(r-ct) + G(r+ct)]$$

Con lo que vemos rápidamente que para una onda que se aleja del centro de impacto ($G(r+ct)=0$), podemos tomar una función senoidal para $F(r-ct)$ y reproducir aproximadamente el patrón de la onda, caracterizado por una amplitud decreciente a medida que aumenta la distancia r al centro de impacto. Evidentemente la solución diverge para $r=0$ y sería necesario considerar las condiciones de contorno adecuadas.

El caso de un impacto de dos objetos en el interior del agua corresponde a ondas esféricas tridimensionales que se propagan desde un centro. Según el *principio de Huygens*, todo punto de un sistema afectado por un proceso ondulatorio es emisor de *ondas secundarias esféricas*.

8-Relación entre la ecuación de Laplace y la ecuación de ondas.

La ecuación diferencial de Laplace para una magnitud $\xi(x,y)$ en dos dimensiones luce de esta forma

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = 0$$

muchos fenómenos físicos con simetría plana siguen esta ecuación; así por ejemplo : corrientes de potencial en un fluido o el potencial electrostático de una carga cerca de una placa conductora. Esta ecuación de Laplace en dos dimensiones es formalmente (matemáticamente) muy similar a la ecuación de ondas. Matemáticamente podemos hacer que el parámetro c , correspondiente a la velocidad de la onda, sea la unidad imaginaria i . Después de todo, se trata de un número que admite las mismas operaciones que cualquier número real y con la propiedad $i^2 = -1$; esto transforma la ecuación de ondas en

$$i^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0$$

expresión que formalmente es igual a la ecuación de Laplace, aunque la coordenada temporal debe ahora interpretarse físicamente como una coordenada espacial. Siguiendo el formalismo matemático, la solución general de la ecuación de Laplace en dos dimensiones es la misma que la de la ecuación de ondas, pero considerando la velocidad imaginaria:

$$\xi(x, y) = F(x+iy) + G(x-iy)$$

es decir, cualquier función cuya variable sea un número complejo resulta ser una solución de la ecuación de Laplace en dos dimensiones. Por supuesto las soluciones con sentido físico deben ser reales, lo cual puede conseguirse aplicando las propiedades del conjugado de un número complejo de esta forma

$$\begin{aligned} \xi_1(x, y) &= 2 \operatorname{Re}[F(x+iy)] = F(x+iy) + \overline{F(x+iy)} = F(x+iy) + F(\overline{x+iy}) = F(x+iy) + F(x-iy) \\ i\xi_2(x, y) &= 2 \operatorname{Im}[F(x+iy)] = F(x+iy) - \overline{F(x+iy)} = F(x+iy) - F(\overline{x+iy}) = F(x+iy) - F(x-iy) \end{aligned}$$

siguiendo el formalismo, las relaciones anteriores son similares al caso de las ondas incidente y rebotada que generaban ondas estacionarias y por tanto podemos buscar soluciones de la forma $\xi(x,y) = \xi_x(x)\xi_y(y)$ para la ecuación de Laplace en dos dimensiones. Análogamente, la ecuación de Laplace en tres dimensiones equivale formalmente a una ecuación de ondas ($z \rightarrow tiempo$)

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} - i^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = 0$$

las soluciones en forma análoga a una onda plana moviéndose en la dirección del vector unitario u serán por tanto de la forma

$$\xi(x, y, z) = F(\bar{u} \bullet \bar{r} + iz) + G(\bar{u} \bullet \bar{r} - iz); \bar{r} = (x, y), \bar{u} = (u_x, u_y)$$

Por otro lado esta analogía induce a pensar también en la búsqueda que soluciones en forma de productos $\xi(x,y,z) = \xi_x(x) \xi_y(y) \xi_z(z)$ de la ecuación de Laplace en 3 dimensiones; algo que utilizaremos a continuación. Es posible que ξ represente también una onda físicamente real si incluimos el tiempo como variable : $\xi(x,y,z,t)$; aunque el laplaciano no opere sobre la variable tiempo. En este caso la solución anterior toma la siguiente forma

$$\xi(x, y, z, t) = F(\bar{u} \bullet \bar{r} \pm ct + iz) + G(\bar{u} \bullet \bar{r} \pm ct - iz); \bar{r} = (x, y), \bar{u} = (u_x, u_y)$$

donde c es la velocidad de la onda. Una solución real incluida en este grupo se ha utilizado en la sección sobre *ondas superficiales en el agua* del trabajo sobre *mecánica de fluidos* con $F(a) = G(-a) = e^{ia}$.

Evidentemente existen soluciones de la ecuación de Laplace distintas de este grupo, como es el caso del potencial gravitatorio en regiones del espacio vacías. Hemos visto para el caso de una *onda esférica* una solución de la forma $\xi(r,t) = f(r-ct)/r$. Podemos llevar al límite esta expresión eligiendo $f(r-ct) = \text{constante}$; lo cual en realidad anula el comportamiento ondulatorio. Tomando como constante la unidad y sin pérdida de generalidad la ecuación de ondas toma la forma de la ecuación de Laplace en 3 dimensiones de esta forma

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = \nabla \bullet \left[\nabla \frac{1}{r} \right] = 0$$

donde hemos utilizado las propiedades del operador gradiente, tal como se introdujo en el trabajo sobre *mecánica de fluidos*. Utilizando el gradiente en coordenadas cartesianas podemos comprobar el resultado anterior

$$\nabla \frac{1}{r} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \Big|_{y,z}, \frac{\partial}{\partial y} \Big|_{x,z}, \frac{\partial}{\partial z} \Big|_{x,y} \right) \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial r}{\partial x} \Big|_{y,z}, \frac{\partial r}{\partial y} \Big|_{x,z}, \frac{\partial r}{\partial z} \Big|_{x,y} \right);$$

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \Rightarrow \frac{\partial r}{\partial x} \Big|_{y,z} = \frac{x}{r}; \quad \frac{\partial r}{\partial y} \Big|_{x,z} = \frac{y}{r}; \quad \frac{\partial r}{\partial z} \Big|_{x,y} = \frac{z}{r};$$

$$\Rightarrow \nabla \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^3} (x, y, z) = -\frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$\nabla \cdot \nabla \frac{1}{r} = - \left(\frac{\partial}{\partial x} \Big|_{y,z}, \frac{\partial}{\partial y} \Big|_{x,z}, \frac{\partial}{\partial z} \Big|_{x,y} \right) \cdot \left[\frac{1}{r^3} (x, y, z) \right] = - \left[\frac{3}{r^3} - \frac{3(x^2 + y^2 + z^2)}{r^5} \right] = - \left[\frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^3} \right] = 0$$

lo cual justifica en principio la ecuación de Laplace para valores de r no nulos. Para $r=0$ el resultado debe considerarse *indeterminado*. Sin embargo el Laplaciano de $1/r$ nos reserva una sorpresa. Si le aplicamos el teorema integral de la divergencia sobre una esfera centrada en el origen $(0,0,0)$ y de radio no nulo arbitrario tenemos

$$\int \nabla^2 \frac{1}{r} dv = \int \nabla \cdot \left(\nabla \frac{1}{r} \right) dv = \oint \left(\nabla \frac{1}{r} \right) \cdot d\vec{S} = - \oint \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot d\vec{S} = -4\pi$$

donde la integral de superficie corresponde a la definición de *ángulo sólido* lo que justifica el valor no nulo de la integral. Tenemos por tanto un objeto matemático que resulta ser nulo para todos los puntos del espacio salvo para uno y cualquier integral de volumen que contenga dicho punto debemos asignarle una valor no nulo. Se distingue esta nueva especie matemática del concepto de función denominándola *función generalizada* o *distribución*, en concreto es un distribución del tipo *delta de Dirac* $\delta(r)$. Introduciendo una constante q/ϵ , podemos escribir el resultado como

$$\nabla^2 \frac{q}{4\pi\epsilon r} = -\frac{q}{\epsilon} \delta(r); \quad \int_{\text{todo el espacio}} \delta(r) dv = 1$$

la distribución $\delta(r)$ se define como nula para r distinto de cero y la integral de volumen de $\delta(r)$ es igual a 1 si el volumen incluye el punto $r=0$. Las unidades de $\delta(r)$ son las de la inversa de un volumen y el lector puede ver claramente la similitud de la ecuación anterior y la *ecuación de Poisson* para el potencial de un campo electrostático (o gravitatorio), donde la densidad corresponde a una carga o masa puntual localizada en $r=0$. Evidentemente la carga puntual no tiene por qué estar en $r=0$ y se puede localizar en un punto arbitrario r' , en este caso la ecuación anterior queda así

$$\nabla^2 \frac{q}{|r-r'|} = -4\pi q \delta(r-r')$$

donde el operador gradiente se aplica sobre las coordenadas r del punto de observación del campo, no sobre el punto de localización de la carga r' . A partir de este resultado y del teorema de Green se puede establecer una solución general para la ecuación de Poisson. El teorema de Green es una consecuencia del teorema integral de la divergencia (ver sección matemática del trabajo de introducción a la mecánica de fluidos). Si tomamos funciones derivables ϕ, g arbitrarias y definiendo la función una vectorial A partiendo de ellas tenemos

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \phi \nabla g - g \nabla \phi \Rightarrow \nabla \cdot \bar{A} = \phi \nabla^2 g + \nabla \phi \cdot \nabla g - \nabla g \cdot \nabla \phi - g \nabla^2 \phi = \phi \nabla^2 g - g \nabla^2 \phi \\ \int \nabla \cdot \bar{A} dv &= \int [\phi \nabla^2 g - g \nabla^2 \phi] dv = \oint \bar{A} \cdot d\bar{S} = \oint [\phi \nabla g - g \nabla \phi] \cdot d\bar{S} \quad (\text{teorema de Green}) \end{aligned}$$

Elegimos las funciones ϕ, g de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi &= -\frac{\rho(\bar{r})}{\varepsilon} \quad (\text{ec. de Poisson}) \\ \nabla^2 g &= \delta(\bar{r} - \bar{r}') \end{aligned}$$

y aplicado al teorema de Green tenemos

$$\int \left[\phi \delta(\bar{r} - \bar{r}') + g \frac{\rho(\bar{r})}{\varepsilon} \right] dv = \oint [\phi \nabla g - g \nabla \phi] \cdot d\bar{S}$$

de los resultados precedentes vemos que podemos elegir $g = \frac{-1}{4\pi|\bar{r} - \bar{r}'|}$ y por tanto

$$\int \phi \delta(\bar{r} - \bar{r}') dv = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{\rho(\bar{r})}{|\bar{r} - \bar{r}'|} dv - \frac{1}{4\pi} \oint \left[\phi \nabla \frac{1}{|\bar{r} - \bar{r}'|} - \frac{1}{|\bar{r} - \bar{r}'|} \nabla \phi \right] \cdot d\bar{S}$$

si consideramos r' un punto fijo del campo y r un punto que varía en todo el espacio sobre el que se realiza la integración, el resultado es un valor integrado para la función potencial de la ecuación de Poisson

$$\phi(\bar{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int \frac{\rho(\bar{r})}{|\bar{r} - \bar{r}'|} dv - \frac{1}{4\pi} \oint \left[\phi \nabla \frac{1}{|\bar{r} - \bar{r}'|} - \frac{1}{|\bar{r} - \bar{r}'|} \nabla \phi \right] \cdot d\bar{S}$$

La integral de superficie corresponde a *condiciones de contorno* sobre el valor de la función potencial y su gradiente en los puntos de una superficie cerrada.

El desarrollo seguido aquí para resolver la ecuación de Poisson se puede generalizar en el método de la *función de Green*. Dado un operador diferencial *lineal* D como puede ser el operador de Laplace, la ecuación de ondas, la ecuación de difusión, la ecuación de propagación del calor, la ecuación de Schrödinger, etc. Se trata de encontrar la función de Green g que sea solución de una ecuación diferencial de la forma $D(g) = \delta(\bar{r} - \bar{r}')$. A partir de aquí se puede encontrar una solución para la ecuación diferencial $D(f) = u(r)$, siendo u una función arbitraria.

El método de la separación de variables también es aplicable para encontrar soluciones al Laplaciano. En el apéndice se describe el caso de coordenadas esféricas con simetría axial.

9-El principio de Huygens y la difracción.

En 1678 Christiaan Huygens propuso el siguiente *principio heurístico* para explicar el mecanismo de propagación de una onda:

Todo punto afectado por una onda puede considerarse como una fuente de ondas esféricas secundarias que se extienden en todas las direcciones con la misma velocidad, frecuencia y longitud de onda que el frente de onda del que proceden.

Probablemente el lector recuerda modelos que utilizan este principio heurístico para visualizar los procesos de reflexión y refracción de una onda. Sin embargo el enunciado del principio presenta problemas de interpretación física. Normalmente una onda tiene asociado un sentido de propagación :va de un punto *A* a un punto *B*. Pero según el principio, las ondas esféricas secundarias se propagan de la misma forma en todas las direcciones, no hay una dirección privilegiada. Tomemos el caso de la onda circular generada por una piedra que cae en la superficie de un lago en reposo. Un punto distante del centro de impacto llega a ser afectado por la onda y según el principio se convierte en emisor secundario de ondas esféricas. La suma de todas las contribuciones secundarios genera en principio tanto una perturbación que avanza como una que retrocede respecto del movimiento inicial de la onda.

Sin embargo el principio heurístico sirve de base para un planteamiento matemático mas preciso. Según el principio podemos establecer que la forma funcional de una onda será de este tipo

$$\phi(\bar{r}, t) = \sum_{k, r'} A_i(k, \bar{r}', \bar{r}) \frac{\sin(kR - \omega t)}{R}; \quad R = |\bar{r} - \bar{r}'|$$

donde hemos tomado una onda sinusoidal para la función $f(r-ct)$ de la onda esférica. El punto r' corresponde al punto considerado como emisor secundario y r es el punto de observación de la onda. Los factores A_i ajustan la amplitud de la onda secundaria y consideramos que, para una situación estacionaria, solo dependen del vector de ondas k , del punto emisor secundario r' considerado y del punto de observación del campo r . Para el caso de una onda monocromática caracterizada por una única longitud de onda k , el principio indica que las ondas secundarias tienen esa misma longitud de onda k . Podemos utilizar la relación de Euler $e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$ y expresar la relación anterior así

$$\phi^c(\bar{r}, t) = \sum_{k, r'} A_i(k, \bar{r}', \bar{r}) \frac{e^{i(kR - \omega t)}}{R} = \left[\sum_{k, r'} A_i(k, \bar{r}', \bar{r}) \frac{e^{ikR}}{R} \right] e^{-i(\omega t)} = \phi_c(\bar{r}) \phi_c(t); \quad \phi(\bar{r}, t) = \text{Re}(\phi^c(\bar{r}, t))$$

donde la amplitud de onda corresponde a la parte real de la expresión compleja ϕ^c . Vemos que la expresión admite una factorización en parte espacial y parte temporal. Si aplicamos la ecuación de ondas a la forma que hemos obtenido tenemos

$$\begin{aligned} \phi_c(t) \nabla^2 \phi_c(\bar{r}) &= \frac{\phi_c(\bar{r})}{c^2} \frac{\partial^2 \phi_c(t)}{\partial t^2} = -\phi_c(t) \frac{\omega^2}{c^2} \phi_c(\bar{r}) \Rightarrow \\ \nabla^2 \phi_c(\bar{r}) + k^2 \phi_c(\bar{r}) &= 0 \end{aligned}$$

la ecuación diferencial anterior, conocida como *ecuación de Helmholtz*, representa al conjunto de todas las soluciones compatibles con el principio de Huygens para el caso de ondas monocromáticas. Podemos encontrar las integrales de la ecuación de Helmholtz mediante la técnica de la función de Green señalada anteriormente. Para ello necesitamos encontrar la función de Green correspondiente a la ecuación de Helmholtz

$$\nabla^2 g(\bar{r}) + k^2 g(\bar{r}) = \delta(\bar{r} - \bar{r}')$$

el siguiente candidato resulta ser válido para la función de Green correspondiente a la ecuación de Helmholtz, y puede demostrarse que es el único candidato

$$\begin{aligned} g(\bar{r}) &= \frac{-1}{4\pi} \frac{e^{ikR}}{R}; \\ \nabla \left(\frac{e^{ikR}}{R} \right) &= \frac{ik}{R} \frac{\bar{R}}{R} e^{ikR} - \frac{\bar{R}}{R^3} e^{ikR} = e^{ikR} (1 - ikR) \nabla \frac{1}{R}; \\ \nabla \cdot \left[\nabla \left(\frac{e^{ikR}}{R} \right) \right] &= \nabla \cdot \left[e^{ikR} (1 - ikR) \nabla \frac{1}{R} \right] = \nabla \left[e^{ikR} (1 - ikR) \right] \cdot \nabla \frac{1}{R} + e^{ikR} (1 - ikR) \nabla^2 \frac{1}{R}; \\ \nabla \left[e^{ikR} (1 - ikR) \right] &= ik e^{ikR} (1 - ikR) \nabla R - e^{ikR} ik \nabla R = e^{ikR} k^2 R \nabla R \Rightarrow \\ \nabla \cdot \left[\nabla \left(\frac{e^{ikR}}{R} \right) \right] &= -e^{ikR} k^2 R \nabla R \cdot \frac{\bar{R}}{R^3} - 4\pi \delta(\bar{R}) e^{ikR} (1 - ikR) = -k^2 \frac{e^{ikR}}{R} - 4\pi \delta(\bar{R}) \Rightarrow \\ \nabla^2 \left(\frac{-1}{4\pi} \frac{e^{ikR}}{R} \right) + k^2 \left(\frac{-1}{4\pi} \frac{e^{ikR}}{R} \right) &= \delta(\bar{R}) = \delta(\bar{r} - \bar{r}') \end{aligned}$$

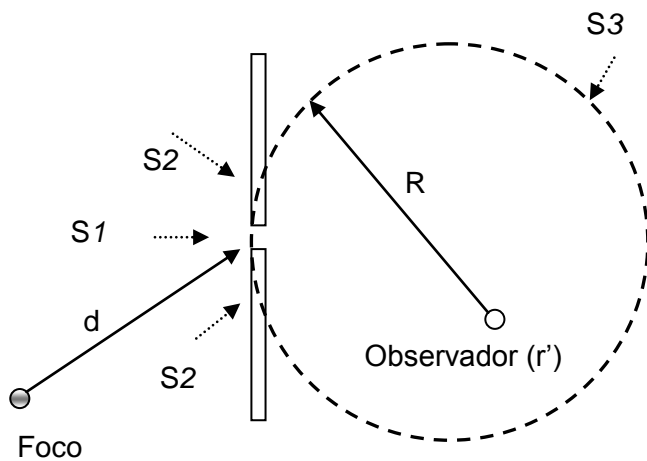
donde el factor a la derecha de $\delta(\bar{R})$ se elimina ya que cuando R tiende a cero este valor tiende a 1 (ver apéndice delta de Dirac). Si aplicamos ahora el teorema de Green variando r en todo el volumen de integración y manteniendo r' en un punto fijo

$$\begin{aligned} \int [\phi_c \nabla^2 g - g \nabla^2 \phi_c] dv &= \oint [\phi_c \nabla g - g \nabla \phi_c] \cdot d\bar{S}; \quad g = \frac{-1}{4\pi} \frac{e^{ikR}}{R}; \quad \nabla^2 \phi_c(\bar{r}) + k^2 \phi_c(\bar{r}) = 0 \\ \int \left[\phi_c \left(k^2 \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikR}}{R} + \delta(\bar{r} - \bar{r}') \right) + \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikR}}{R} (-k^2 \phi_c(\bar{r})) \right] dv &= \frac{-1}{4\pi} \oint \left[\phi_c \nabla \left(\frac{e^{ikR}}{R} \right) - \frac{e^{ikR}}{R} \nabla \phi_c \right] \cdot d\bar{S} \Rightarrow \\ \int \phi_c \delta(\bar{r} - \bar{r}') dv = \phi_c(\bar{r}') &= \frac{-1}{4\pi} \oint \left[\phi_c \nabla \left(\frac{e^{ikR}}{R} \right) - \frac{e^{ikR}}{R} \nabla \phi_c \right] \cdot d\bar{S}; \quad \bar{R} = \bar{r} - \bar{r}' \end{aligned}$$

resultando que el valor del campo en un punto $\phi_c(r)$ depende de una integral sobre una superficie que encierra a dicho punto r' .

Difracción

Podemos aplicar el resultado anterior al caso en que una onda pasa por una pequeña abertura practicada en una placa. En el caso de ondas luminosas, la óptica geométrica nos dice que al pasar la luz por la abertura se produce una zona de sombra en la que no hay luz. Pero la experiencia indica que dicha sombra geométrica se produce si el tamaño de la abertura es mayor que la longitud de onda, pero para dimensiones comparables es posible detectar luz en las zonas de sombra geométrica.



El dibujo representa un foco emisor de ondas monocromáticas esféricas, y una placa material fija de grandes dimensiones con una pequeña abertura. El círculo punteado corresponde a una superficie esférica de radio muy grande que utilizaremos para calcular la integral del resultado matemático anterior sobre un punto de observación. Descomponemos la superficie de integración en 4 partes:

Parte S3 : es la parte de la superficie esférica que no toca a la placa ni a la abertura.

Partes S2 : son las partes de la superficie esférica que tocan con la placa.

Parte S1 : corresponde a la parte de la superficie esférica en que está la abertura.

Si $\phi(r)$ es la función de onda, a la izquierda de la placa suponemos que dicha placa no refleja las ondas emitidas desde el foco y suponemos que la función de onda corresponde a una onda esférica

$$\phi_c = \frac{Ae^{ikd}}{d}$$

La integral que debemos calcular se puede descomponer en tres partes según las superficies que hemos descrito

$$\phi_c(\bar{r}') = \sum_{i=1,2,3} \frac{-1}{4\pi} \oint \left[\phi_c \nabla \left(\frac{e^{ikR}}{R} \right) - \frac{e^{ikR}}{R} \nabla \phi_c \right] \cdot d\bar{S}_i$$

Donde $d\bar{S}$ es un vector apuntando al exterior de la superficie esférica de integración. Consideramos las siguientes aproximaciones

1-La integral sobre S3 constituye esencialmente una onda secundaria de retroceso, por lo que el valor de esta contribución debe anularse, ya que no existe ningún objeto reflectante.

2-Las integrales sobre S2 corresponden a una zona de sombra geométrica y, aunque en rigor no sea cierto debido al fenómeno de la difracción, vamos a suponer que $\phi(r)$ toma un valor despreciable en esta zona de modo que las integrales son despreciables.

3-En S1 el valor de la función de onda $\phi_c(r')$ es el mismo que si no existiese placa.

El resultado es

$$\begin{aligned} \phi_c(\bar{r}') &= \frac{-A}{4\pi} \int \left[\frac{e^{ikd}}{d} \nabla \left(\frac{e^{ikR}}{R} \right) - \frac{e^{ikR}}{R} \nabla \left(\frac{e^{ikd}}{d} \right) \right] \cdot d\bar{S}_1 = \frac{-A}{4\pi} \int \left[\frac{e^{ikd}}{d} e^{ikR} (1-ikR) \nabla \frac{1}{R} - \frac{e^{ikR}}{R} e^{ikd} (1-ikd) \nabla \frac{1}{d} \right] \cdot d\bar{S}_1 = \\ &= \frac{-A}{4\pi} \int \left[\frac{e^{ik(R+d)}}{Rd} \left(R(1-ikR) \nabla \frac{1}{R} - d(1-ikd) \nabla \frac{1}{d} \right) \right] \cdot d\bar{S}_1 \end{aligned}$$

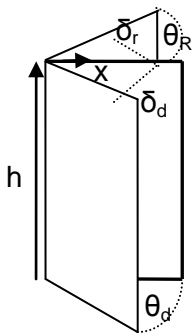
4- Una aproximación mas :suponemos la longitud de onda mucho menor que las distancias R y d : $kR \gg 1$, $kd \gg 1$ y por tanto

$$\phi_c(\vec{r}') = ik \frac{A}{4\pi} \int \left[\frac{e^{ik(R+d)}}{Rd} \left(R^2 \nabla \frac{1}{R} - d^2 \nabla \frac{1}{d} \right) \right] \cdot d\vec{S}_1 = -ik \frac{A}{4\pi} \int \left[\frac{e^{ik(R+d)}}{Rd} \left(\frac{\vec{R}}{R} - \frac{\vec{d}}{d} \right) \right] \cdot d\vec{S}_1 = ik \frac{A}{4\pi} \int \frac{e^{ik(R+d)}}{Rd} [\cos(\vec{d}, d\vec{S}_1) - \cos(\vec{R}, d\vec{S}_1)] dS_1$$

Se pueden añadir aproximaciones adicionales a este resultado para explicar los casos de *difracción de Fresnel* (observador cercano a la placa-ver apéndice) y de *Fraunhofer* (observador alejado de la placa). En el caso Fraunhofer suponemos el foco en el infinito y por tanto lo que llega a la placa es una *onda plana* de amplitud constante. Para simplificar el modelo suponemos que los rayos llegan paralelos a un plano perpendicular a la placa que pasa por el centro geométrico de la rendija y al que llamaremos “suelo”; en el dibujo anterior puede ser el mismo plano del papel. Debido al ángulo (d, dS_1) entre la onda plana incidente y el plano de la rendija existirá un desfase geométrico δ_d en el valor de la onda plana de fase $exp(ikd)$ en los puntos de la rendija. Un observador (r') muy alejado de la placa solo percibirá una *componente* de la onda refractada en la rendija, correspondiente a la onda plana cuyo plano de fase es perpendicular a R . Debido al ángulo (R, dS_1) entre dicha onda plana difractada y el plano de la rendija existirá un desfase geométrico δ_R en el valor de la onda plana de fase $exp(ikR)$ en los puntos de la rendija; la lente no introduce ningún desfase adicional. Con estas dos aproximaciones la formula anterior queda así

$$\phi_c(\vec{r}') = -ik \frac{A}{4\pi} \frac{e^{ik(R_0+d_0)}}{R_0 d_0} [\cos(\theta_d) + \cos(\theta_R)] \int e^{ik(\delta_R + \delta_d)} dS_1 \quad \theta_d = \vec{d} \angle -d\vec{S}_1, \theta_R = \vec{R} \angle d\vec{S}_1$$

Los valores R_0, d_0 son constantes asociadas al frente de ondas planas incidente y refractada. Para el caso sencillo de una *rendija rectangular* el cálculo de los desfases δ se puede realizar utilizando la imagen de una puerta abierta. El hueco de la puerta es la rendija, donde tenemos que determinar los valores de la fase, y el plano de la puerta corresponde al frente de onda de la onda plana. Con ayuda del dibujo adjunto podemos calcular fácilmente el desfase

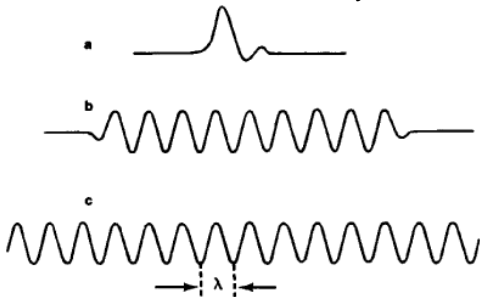


$$\delta_d + \delta_R = kx [\text{sen}(\theta_R) - \text{sen}(\theta_d)] \Rightarrow \phi_c(\vec{r}') = -ik \frac{A}{4\pi} \frac{e^{ik(R_0+d_0)}}{R_0 d_0} [\cos(\theta_d) + \cos(\theta_R)] h \int_0^D e^{ikx[\text{sen}(\theta_R) - \text{sen}(\theta_d)]} dx$$

Donde R_0, d_0 son valores constantes correspondientes a $x=0$ (el quicio de la puerta) y hemos tomado como referencia de ángulos la dirección x de la rendija lo cual afecta a su signo ($\theta_R > 0, \theta_d < 0$ en el dibujo). El resultado puede generalizarse (apéndice) y muestra la relación entre la difracción y la *transformada de Fourier* (ver apéndice). Finalmente también hemos encontrado una pista sobre la anulación de las ondas secundarias en retroceso y está en el factor $\cos(\theta_d) + \cos(\theta_R)$. Para la onda secundaria en retroceso *directo* el factor será $\cos(\theta_d) + \cos(\theta_d + \pi) = 0$; lo que muestra la anulación de las ondas secundarias en retroceso.

El planteamiento que hemos seguido sobre la difracción se refiere a una pequeña abertura en una placa, pero la difracción también se da en el caso en que la luz incide en el borde de la placa, apareciendo luz en las zonas correspondientes a la sombra geométrica. En la práctica se dan fenómenos de difracción cuando ondas de radio de la longitud de onda adecuada interrumpen su normal propagación por accidentes geográficos como montañas(ver apéndice *Zonas de Fresnel y Telecomunicaciones*).

El desarrollo realizado se basa en que el foco genera una onda monocromática. En rigor esto no es posible ya que una onda monocromática es *infinita y eterna*. Una onda monocromática es por ejemplo $\text{sen}(kr-wt)$ de modo que en cualquier instante de tiempo podemos caracterizar la onda por medio de su longitud de onda k . En la realidad esto no es así y los focos emiten los llamados *pulsos o trenes de onda*, es decir, ondas con un inicio y un fin en el tiempo y en el espacio. La imagen representa



ejemplos de estos trenes de onda. La calidad monocromática de los focos emisores se mide por el parámetro denominado *longitud de coherencia* que representa aproximadamente la longitud del tren en el que la onda es aproximadamente sinusoidal (monocromática). Para desfases δ que excedan de la longitud de coherencia los resultados de la aproximación de

Franunhoffer no serán válidos y en general mas allá de este límite de la longitud de coherencia no se observa el fenómeno de la difracción. Los laser son las fuentes de luz con mas alta longitud de coherencia.

El *análisis de Fourier* permite expresar los pulsos o trenes de onda como suma de ondas componentes monocromáticas puras.

10-Ondas estacionarias en tres dimensiones.

Hemos visto el caso de ondas estacionarias en una dimensión para el caso de una banda elástica o muelle obligado a oscilar en una zona acotada por dos paredes. Las ondas elásticas en tres dimensiones son más complejas, ya que a parte de las ondas longitudinales también son posibles ondas transversales y estos dos tipos de ondas se propagan en general a distinta velocidad. Sin embargo es posible suponer una situación en que la velocidad de los modos longitudinales y transversales es la misma. En este caso el campo de desplazamientos elásticos será un vector, suma vectorial de los desplazamientos elásticos de cada onda posible. Para el caso de la componente y

$$\nabla^2 \xi_y^i = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi_y^i}{\partial t^2} ; \xi_y = \sum_i \xi_y^i \Rightarrow \nabla^2 \xi_y = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi_y}{\partial t^2} ; \xi_y(x, y, z, t)$$

Vemos por tanto que el campo de desplazamientos verifica la ecuación de onda para cada una de sus componentes vectoriales x,y,z.

Como hemos visto, las soluciones estacionarias implican la existencia de puntos en los que el proceso ondulatorio se anula permanentemente. En el caso unidimensional esto nos llevó a una función de onda que factorizaba sus variables de esta forma: $P(x)T(t)$. En el caso de tres dimensiones la analogía nos lleva a $\xi_y(x,y,z,t)=P(x,y,z)T(t)$. De esta

forma, los puntos en los que sea $P(x,y,z)=0$ el campo de desplazamientos, en la dirección (y) en este caso, será siempre nulo y corresponden a un nodo de ξ_y . Podemos aplicar a esta solución la ecuación de ondas

$$c^2 T(t) \nabla^2 P(x,y,z) = P(x,y,z) \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} \Rightarrow \frac{1}{P(x,y,z)} \nabla^2 P(x,y,z) = \frac{1}{c^2 T(t)} \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2}$$

La ecuación diferencial que se obtiene dividiendo por $P(x,y,z)T(t)$ (no idénticamente nula) separa las variables a los dos lados del signo igual. A la izquierda es un valor en (x,y,z) , a la derecha un valor en (t) . Dado que estas variables son independientes, la única posibilidad es que el valor de ambos lados de la ecuación sea una constante k :

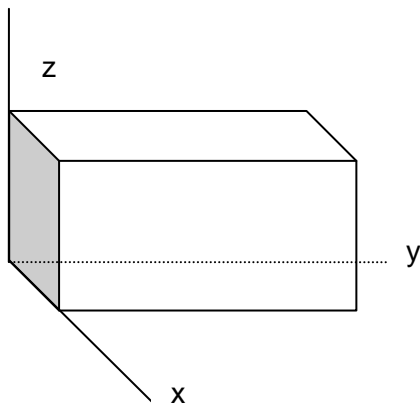
$$\nabla^2 P(x,y,z) = k P(x,y,z); \quad \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} = c^2 k T(t)$$

para que la ecuación de $T(t)$ sea armónica y no tome valores tendentes a cero o a infinito, impropios de una situación estacionaria, es necesario que k sea un valor negativo y por tanto resulta mejor escribir el resultado de esta forma

$$\nabla^2 P(x,y,z) = -k^2 P(x,y,z); \quad \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} = -k^2 c^2 T(t)$$

A partir de aquí, la busca de las ondas estacionarias, llamadas también modos normales de oscilación, depende de forma determinante de las condiciones concretas del caso; sin embargo veremos que se puede asumir una factorización de la función $P(x,y,z)$ en una situación sencilla.

Tomemos el caso de un material elástico en las condiciones ya señaladas que tenga



forma de paralelepípedo regular limitado por paredes rígidas de modo que en todas las caras el campo de desplazamiento se anule. Por tanto el plano $x=0$ es un plano nodal y se cumple siempre $P(0,x,y)=0$ para cualquier combinación (y,z) . Evidentemente podemos reproducir este comportamiento haciendo $P(x,y,z)=P^x(x)P^{yz}(y,z)$ y $P^x(0)=0$. Introduciendo esta factorización y utilizando las propiedades del operador gradiente que pueden verse en el trabajo sobre mecánica de fluidos

$$\nabla^2 P^x(x)P^{yz}(y,z) = -k^2 P^x(x)P^{yz}(y,z) = \nabla \cdot [\nabla(P^x(x)P^{yz}(y,z))]$$

$$\begin{aligned} \nabla(P^x(x)P^{yz}(y,z)) &= P^{yz}(y,z)\nabla(P^x(x)) + P^x(x)\nabla(P^{yz}(y,z)) \\ \nabla \cdot [\nabla(P^x(x)P^{yz}(y,z))] &= \nabla(P^{yz}(y,z)) \cdot \nabla(P^x(x)) + P^{yz}(y,z)\nabla^2(P^x(x)) + \\ &\quad \nabla(P^x(x)) \cdot \nabla(P^{yz}(y,z)) + P^x(x)\nabla^2(P^{yz}(y,z)) \end{aligned}$$

Note el lector que los productos escalares de gradientes se anulan, ya que un término anula la componente (x) y el otro anula las componentes (y,z). Por tanto tenemos

$$P^{yz}(y,z)\nabla^2(P^x(x)) + P^x(x)\nabla^2(P^{yz}(y,z)) = -k^2 P^x(x)P^{yz}(y,z) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{P^x(x)}\nabla^2(P^x(x)) + \frac{1}{P^{yz}(y,z)}\nabla^2(P^{yz}(y,z)) = -k^2 \Rightarrow \frac{1}{P^x(x)}\frac{d^2}{dx^2}(P^x(x)) + \frac{1}{P^{yz}(y,z)}\nabla^2(P^{yz}(y,z)) = -k^2$$

Por las mismas razones que en el caso de la factorización de la variable tiempo los sumando deben corresponder a valores constantes y el término correspondiente a la derivada segunda en x debe ser una constante negativa. Evidentemente podemos repetir la factorización con $P^{yz}(y,z)$ y obtendremos en total las siguientes ecuaciones

$\frac{d^2 T(t)}{dt^2} = -k^2 c^2 T(t)$ $\frac{d^2 P^x(x)}{dx^2} = -k_x^2 P^x(x)$ $\frac{d^2 P^y(y)}{dy^2} = -k_y^2 P^y(y)$ $\frac{d^2 P^z(z)}{dz^2} = -k_z^2 P^z(z)$ $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$

Por tanto la solución general para $P(x,y,z)T(t)$ es

$$P(x, y, z) = (A_x \sin(k_x x) + B_x \cos(k_x x))(A_y \sin(k_y y) + B_y \cos(k_y y))(A_z \sin(k_z z) + B_z \cos(k_z z))$$

$$T(t) = (A_t \sin(kt) + B_t \cos(kt)) \quad k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$$

En nuestro caso, dado que los planos $x=0, y=0, z=0$ son planos nodales debe ser $B_x=B_y=B_z=0$. Además los planos opuestos $x=d_x, y=d_y, z=d_z$ también deben ser nodales por lo que las funciones seno debe anularse en estos planos nodales

$$k_x d_x = n_x \pi ; k_y d_y = n_y \pi ; k_z d_z = n_z \pi ; \quad k^2 = \left(\frac{n_x \pi}{d_x}\right)^2 + \left(\frac{n_y \pi}{d_y}\right)^2 + \left(\frac{n_z \pi}{d_z}\right)^2$$

La solución genérica, con estas condiciones de contorno, será

$$\xi_y(x, y, z, t) = \sum_{n_x=1}^{\infty} \sum_{n_y=1}^{\infty} \sum_{n_z=1}^{\infty} A_{n_x} A_{n_y} A_{n_z} \sin\left(\frac{n_x \pi}{d_x} x\right) \sin\left(\frac{n_y \pi}{d_y} y\right) \sin\left(\frac{n_z \pi}{d_z} z\right) (A_t \sin(kt) + B_t \cos(kt))$$

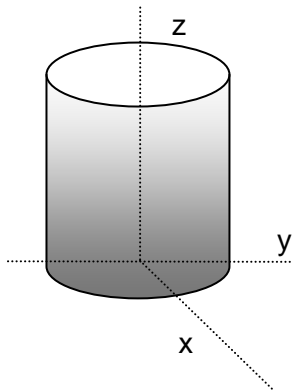
$$k = k(n_x, n_y, n_z)$$

El resto de constantes se puede determinar con las condiciones de contorno correspondientes a la derivada parcial $\partial \xi_y / \partial t$ en $t=0$ y con el contenido de energía correspondiente a los distintos modos de oscilación. Si la solución que encontramos verifica las condiciones de contorno y la ecuación de ondas, existe un teorema que asegura que solo puede haber una solución con esas condiciones.

Se puede seguir el método aquí presentado en general con *sistemas de coordenadas ortogonales*, por ejemplo para casos en los que los nodos se distribuyan en superficies esféricas o cilíndricas. Si la simetría es la adecuada, se pueden utilizar la separación

de variables expresando los operadores diferenciales en estos sistemas de coordenadas.

Si el material elástico tiene forma cilíndrica, la superficie nodal es la de un cilindro y lo



natural es ajustar a este objeto un sistema de coordenadas cilíndrico. Dado que este sistema de coordenadas es ortogonal, es decir, las bases locales del sistema de coordenadas son ortogonales en cualquier punto, podemos aplicar un razonamiento similar al caso de las componentes cartesianas

$$\nabla^2 P(r, \theta, z) = -k^2 P(r, \theta, z); \quad \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} = -k^2 c^2 T(t) \quad ; \quad P(r, \theta, z) = P^r(r) P^\theta(\theta) P^z(z) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{P^r(r)} \nabla^2(P^r(r)) + \frac{1}{P^\theta(\theta)} \nabla^2(P^\theta(\theta)) + \frac{1}{P^z(z)} \nabla^2(P^z(z)) = -k^2$$

El Laplaciano hay que expresarlo en coordenadas cilíndricas y la separación de variables exige introducir constantes de integración, pero ahora esta separación de variables no es un proceso directo, si no que hay que ir con cuidado y empezar por la coordenada z, que es la mas sencilla

$$\frac{d^2 P^z(z)}{dz^2} = -k_z^2 P^z(z) \Rightarrow \frac{1}{P^r(r)} \nabla^2(P^r(r)) + \frac{1}{P^\theta(\theta)} \frac{1}{r^2} \frac{d^2 P^\theta(\theta)}{d\theta^2} = -k^2 + k_z^2 \Rightarrow$$

$$\left\{ (k^2 - k_z^2) r^2 + \frac{r^2}{P^r(r)} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dP^r(r)}{dr} \right) \right\} + \frac{1}{P^\theta(\theta)} \frac{d^2 P^\theta(\theta)}{d\theta^2} = 0$$

$$\frac{d^2 P^\theta(\theta)}{d\theta^2} = -k_\theta^2 P^\theta(\theta) \Rightarrow \left[(k^2 - k_z^2) r^2 - k_\theta^2 \right] P^r(r) + r \frac{d}{dr} \left(r \frac{dP^r(r)}{dr} \right) = 0$$

como en el caso anterior hemos utilizado valores negativos $-k_z^2$, $-k_\theta^2$ para evitar soluciones hiperbólicas; pero en el caso de la coordenada θ hay que hacer una aclaración importante. En el sistema de coordenadas cilíndrico los puntos definidos por los valores (r, θ, z) y $(r, \theta+2\pi, z)$ representan el mismo punto físico y por tanto debe ser $P(r, \theta, z) = P(r, \theta+2\pi, z)$; lo que supone $P^\theta(\theta) = P^\theta(\theta+2\pi)$. Las soluciones de la ecuación correspondiente son

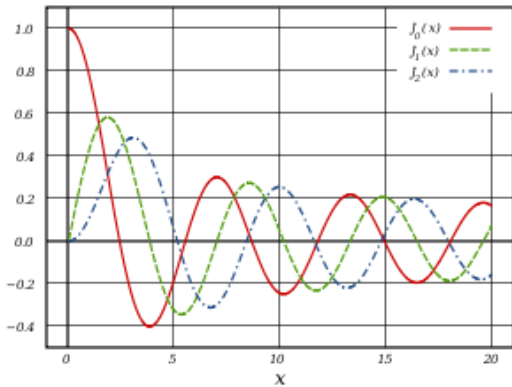
$$\frac{d^2 P^\theta(\theta)}{d\theta^2} = -k_\theta^2 P^\theta(\theta) \Rightarrow P^\theta(\theta) = P_0^\theta \cos(k_\theta \theta + \Delta_0)$$

donde los términos con subíndice cero son constantes. Para satisfacer la condición física anterior debe ser $2\pi k_\theta = n2\pi$, es decir, k_θ debe ser un número entero $k_\theta = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. En total, la separación de variables en cilíndricas produce este resultado

$$\frac{d^2 P^z(z)}{dz^2} = -k_z^2 P^z(z) \quad ; \quad \frac{d^2 P^\theta(\theta)}{d\theta^2} = -k_\theta^2 P^\theta(\theta) \quad ; \quad k_\theta = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\left[(k^2 - k_z^2)r^2 - k_\theta^2 \right] P^r(r) + r \frac{d}{dr} \left(r \frac{dP^r(r)}{dr} \right) = 0$$

La última fórmula es similar a la *ecuación diferencial de Bessel*. La ecuación de Bessel es $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - \alpha^2)y = 0$. Note el lector que en la ecuación de Bessel la



variable independiente x es *adimensional*, de modo que para identificar nuestro resultado con la ecuación de Bessel debemos hacer un cambio de variable de la forma $r = x/k_r$, donde k_r tiene unidades de *metro⁻¹*, de modo que llegamos a

$$\left[\frac{k^2 - k_z^2}{k_r^2} x^2 - k_\theta^2 \right] y + x \frac{d}{dx} \left(x \frac{dy}{dx} \right) = 0 \quad ; \quad y(x) = y(k_r, r) = P^r(r)$$

y para obtener la ecuación de Bessel debemos estipular $k_r^2 + k_z^2 = k^2$ y $k_\theta^2 = \alpha^2$, lo que determina a α como un número entero. Las funciones $P^r(x/k_r)$ deberían proporcionarnos varias soluciones de la ecuación $P^r(x/k_r) = 0$ correspondientes a posibles superficies cilíndricas nodales, y la gráfica representa tres soluciones asociadas a valores enteros del parámetro $\alpha = 0, 1, 2$. Las funciones de Bessel no son de periodo exacto.

11-Guía de Ondas.

Tomemos el caso anterior de ondas estacionarias en tres dimensiones en paralelepípedo y modifiquemos la situación eliminando los planos límite $y=0$ y $y=d_y$. De este modo tenemos una banda elástica de sección $d_x d_z$ y longitud teóricamente infinita. En este caso no pueden producirse las componentes estacionarias en la dirección (y) ya que no se produce el rebote de la onda correspondiente. Tomaremos una componente de la solución anterior de esta forma

$$\xi_y^{n_x, n_y} = A_{n_x} A_{n_y} A_z \sin\left(\frac{n_x \pi}{d_x} x\right) \sin\left(\frac{n_z \pi}{d_z} z\right) \sin(k_y y) (B_t \cos(kct)) =$$

$$A_{n_x} A_{n_z} A_y B_t \sin\left(\frac{n_x \pi}{d_x} x\right) \sin\left(\frac{n_z \pi}{d_z} z\right) \frac{1}{2} [\sin(k_y y - kct) + \sin(k_y y + kct)]$$

para la que suponemos $A_t = 0$ sin pérdida de generalidad. Esta expresión induce a buscar soluciones de onda progresiva de la forma

$$\xi_y(x, y, z, t) = \psi(x, z) \sin(k_y y - \omega t)$$

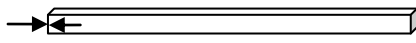
Note el lector que no se trata de una onda plana, ya que la amplitud $\psi(x, z)$ en la dirección perpendicular a la propagación de la onda no tiene por que ser constante. Si introducimos esta forma funcional en la ecuación de onda tenemos

$$\nabla^2 \psi(x, z) = -k_c^2 \psi(x, z); \quad k_c^2 = \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_g^2 \right)$$

Esta ecuación ya ha sido resuelta antes en función de las condiciones de contorno, de este modo el valor k_c está determinado por condiciones de contorno, ω es la frecuencia de oscilación de la onda y c la velocidad de la onda. Todos estos parámetros los podemos obtener experimentalmente, de modo que los resultados anteriores determinan el valor k_g y las distintas componentes ondulatorias en la guía de ondas tienen esta forma

$$\xi_y(x, y, z, t) = A_{nx} A_{nz} A_y B_t \sin\left(\frac{n_x \pi}{d_x} x\right) \sin\left(\frac{n_z \pi}{d_z} z\right) \sin(k_g y - \omega t)$$

Es decir, una *onda guiada* que se propaga en la dirección (y). Podemos imaginar el sistema formado por un oscilador que mueve elásticamente el extremo de la guía de ondas a



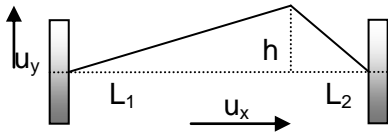
un frecuencia ω . Las condiciones de contorno de ξ y $\partial \xi / \partial t$ sobre el extremo de la guía donde se acopla el oscilador conducen a que la frecuencia de las ondas guiadas y la frecuencia del oscilador deben ser iguales. Pero las componentes ondulatorias a través de la guía debe cumplir $k_c^2 + k_g^2 = \omega^2 / c^2$. Dado que k_c depende de las dimensiones geométricas transversales de la guía y la frecuencia ω del oscilador externo, vemos que ambos parámetros son independientes y podemos elegirlos de modo que el valor k_g resulte ser un número complejo. En este caso no se produce el fenómeno de la onda guiada y el sistema expulsa la energía que el oscilador externo intenta introducir en el sistema. La frecuencia ω correspondiente a $k_g = 0$ se denomina *frecuencia de corte* ω_c y verifica $ck_c = \omega_c$. Solo se pueden propagar en la guía frecuencias superiores a la de corte, de modo que pueda ser $k_g > 0$. Si el oscilador del extremo no oscila con una frecuencia pura, sino una combinación o espectro de frecuencias según el correspondiente análisis de Fourier temporal de señales, entonces solo se transmitirán por la guía las frecuencias correspondientes superiores a la de corte. De este modo la guía de ondas funciona como un filtro que elimina las frecuencias por debajo de la frecuencia de corte.

En el caso de una guía de ondas cilíndrica será $k_r^2 + k_g^2 = \omega^2 / c^2$ y k_r está determinado por la condiciones de contorno del tipo $k_r R = x_0^n$, donde R es el radio del cilindro y x_0^n es un cero de la función de Bessel correspondiente a $n = k_g R$. De nuevo solo se pueden propagar en la guía cilíndrica frecuencias superiores a la de corte. Debido a esto notamos alteración al escuchar la voz de una persona a través de un tubo.

12-Ondas en la cuerda de una guitarra.

Consideremos la pulsación de la cuerda de una guitarra. Cuando la cuerda está en reposo sabemos que tiene definida una tensión mecánica constante asociada al tono de su afinación. Cualquier punto en la cuerda divide a esta en dos partes. La fuerza con que ambas partes se atraen corresponden a la tensión de la cuerda y es fácil ver, según las leyes de Newton, que debe ser igual en cualquier punto de la cuerda en reposo; ya que no existe ninguna parte de la cuerda sometida a aceleración.

Tensamos la cuerda con un dedo, solo muy ligeramente, llevando el dedo a una altura h . Esto hace que la longitud de la cuerda se modifique y, en el margen de la ley de



Hooke, esto supone que la cuerda almacena cierta cantidad de energía potencial elástica. Al soltar la cuerda esta energía potencial se transforma en cinética y por tanto la longitud de la cuerda empieza a disminuir. Debido a esto los puntos de la cuerda

se mueven en principio en las dos direcciones del plano : $\langle y \rangle$ ya que se mueven hacia abajo , $\langle x \rangle$ debido a que la cuerda se está acortando al disminuir la energía potencial elástica. Podemos acotar el desplazamiento de los puntos de la cuerda en la dirección $\langle x \rangle$ ya que este desplazamiento no puede ser superior a la modificación máxima en la longitud de la cuerda

$$\Delta x < \sqrt{L_1^2 + h^2} + \sqrt{L_2^2 + h^2} - (L_1 + L_2) \approx L_1 \left(1 + \frac{h^2}{2L_1^2} \right) + L_2 \left(1 + \frac{h^2}{2L_2^2} \right) - (L_1 + L_2) = \frac{h}{2} \left(\frac{h}{L_1} + \frac{h}{L_2} \right)$$

$$\Delta y < h$$

Evidentemente, donde podemos conseguir fácilmente una mayor altura h en la pulsación de la cuerda es entorno al punto medio, de modo que si se verifica que la altura es mucho menor que la longitud de la cuerda : $h \ll L$, entonces podemos considerar que los puntos de la cuerda se mueven exclusivamente en la dirección vertical. En esta aproximación estamos considerando despreciable la modificación de longitud de la cuerda que pulsamos y consecuentemente con esto debemos considerar que el módulo de la tensión de la cuerda (T), proporcional a la energía elástica, no se ve apenas modificada respecto de la tensión de la cuerda en reposo. Sin embargo en la vibración la cuerda cambia de forma, con lo que la tensión de la cuerda, que es tangente a la misma, cambia también de dirección y esta es la principal variación del vector T . Si representamos el campo de tensiones en la cuerda por la función vectorial $T \cdot u(l,t)$ donde u es un vector unitario tangente a la cuerda, l es la posición de un punto sobre la cuerda medida sobre la misma cuerda y t el tiempo tenemos para la variación de tensión en un tramo dl y en un instante fijo

$$\bar{T} = T \bar{u}; \quad d\bar{T} = \frac{\partial \bar{T}}{\partial l} \Big|_t dl = T \frac{\partial \bar{u}}{\partial l} \Big|_t dl;$$

La variación de tensión en los extremos de dl provoca la aceleración del elemento de masa correspondiente que , según las leyes de Newton y nuestra aproximación son

$$d\bar{T} \bullet \bar{u}_x = 0 ; \quad d\bar{T} \bullet \bar{u}_y = dm \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \Big|_x$$

La derivada en $\langle x \rangle$ de $y(x,t)$ en un instante t fijo corresponde con la pendiente de línea tangente a la cuerda en el punto x considerado. En nuestra aproximación esta línea tangente está muy próxima a la línea de la cuerda en reposo y por tanto la pendiente de la línea tangente es aproximadamente igual al ángulo con la cuerda en reposo (eje x) y al seno de este ángulo. De este modo podemos poner, dado que u_y es un vector constante

$$T \frac{\partial(\bar{u} \bullet \bar{u}_y)}{\partial l} \Big|_t dl = dm \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \Big|_x ; \bar{u} \bullet \bar{u}_y \approx \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_t$$

y dado que para todo dl existe un dx relacionado tenemos como resultado la ecuación de ondas con una velocidad de propagación c que depende de la Tensión y la densidad lineal de masa de la cuerda, ambas medidas en el estado de reposo de la cuerda

$$\frac{\partial(\bar{u} \bullet \bar{u}_y)}{\partial l} \Big|_t dl = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \Big|_t \right) dx \Rightarrow T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Big|_t = \lambda \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \Big|_x ; \lambda = \frac{dm}{dx} ; c = \sqrt{\frac{T}{\lambda}}$$

Note el lector que la velocidad de las ondas mecánicas se calcula a partir de valores propios del equilibrio del sistema considerado. En este caso los parámetros son la tensión de la cuerda y la densidad lineal de masa, ambos en el estado de equilibrio estático. En el caso de las ondas acústicas en el aire los parámetros son la presión y la densidad de una atmósfera en equilibrio; la velocidad de las ondas acústicas en el aire también incluye el cociente entre calores específicos a volumen y a presión constante, parámetros propios del *equilibrio termodinámico*. Esto nos dice que las ondas mecánicas están asociadas a modificaciones relativamente pequeñas respecto a las condiciones de equilibrio de un *sistema estable*; es decir, un sistema que tiende a

recuperar su estado inicial de equilibrio en respuesta a perturbaciones.



Si el lector dispone de una guitarra clásica bien afinada puede realizar las siguientes experiencias:

1-Pulse la nota correspondiente al 5º traste de la 6ª cuerda (la mas gruesa). Podrá notar visualmente como la 5ª cuerda resuena (vibra), ya que se trata de la misma nota que se genera cuando se toca la 5ª cuerda libre; por tanto podemos nombrar esta nota como ω_5 . El fenómeno de resonancia tiene cierta precisión ya que si en la 6ª cuerda tocamos la nota correspondiente al 4º o 6º trastes veremos que desaparece la resonancia en la 5ª cuerda.

2-Si realizamos una escala completa :do₁,re.mi,fa,sol,la,si,do₂, en la 6ª cuerda partiendo de la nota anterior ω_5 (=do₁) llegaremos a una frecuencia $2\omega_5$ (=do₂). y podemos notar visualmente que con esta nota también resuena la 5ª cuerda. Esto corresponde a la segunda componente del análisis de Fourier de cualquier perturbación ondulatoria que se dé en la 5ª cuerda. El proceso podría repetirse para identificar el resto de las componentes de Fourier: $3\omega_5$, $4\omega_5$...pero la guitarra no dispone de los trastes suficientes.

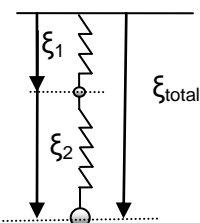
3-Si el lector dispone de un televisor antiguo, de tubo de vacío, puede sintonizarlo y observar la 6ª cuerda frente a la luz que procede del aparato; mejor si es la única luz en la habitación. Si pulsa la 6ª cuerda pisando alguno de los primeros trastes, el lector verá que la cuerda adopta una forma sinusoidal, viajando en una u otra dirección, que no es aparente con luz ordinaria. Incluso es posible encontrar una nota en que la cuerda parezca una senoide fija. Esto se debe a que la luz del televisor es estroboscópica, es decir, se emite como pulsos con una frecuencia de unos 25Hz y la

frecuencia de las primeras notas de la 6ª cuerda está entorno a 100Hz, que es un múltiplo exacto de 25Hz; lo que hace que la sinusoide se nos aparezca estacionaria.

13-Continuidad, Reflexión y Refracción.

La constancia de la frecuencia

Imaginemos dos muelles de distintas constantes elásticas y conectados tal como aparece en el dibujo. La conexión entre muelles se hace mediante una pequeña masa.



Sobre esta actúan las fuerzas de los muelles y la gravedad. Si llevamos el caso hasta el límite en que se anula esta masa tenemos, en módulo, la siguiente relación de fuerzas $k_1\xi_1 = k_2\xi_2$; don de ξ hace referencia a las elongaciones de los dos muelles respecto de sus respectivos estados sin tensión y k hace referencia a las constantes elásticas respectivas. Es posible plantear la combinación de muelles como un muelle equivalente asignándole

una constante k y una elongación que debe ser la suma de las elongaciones anteriores. La fuerza que ejerce este muelle equivalente sobre la masa de abajo debe ser la misma fuerza que ejerce el muelle 2 : $k(\xi_1 + \xi_2) = k_2\xi_2$. Sustituyendo la ecuación anterior tenemos $k = k_1k_2/(k_1 + k_2)$ para la constante elástica del muelle equivalente; que resulta ser menor que cualquiera de las constantes individuales. Por tanto podemos plantear la dinámica de la misma forma que con un solo muelle

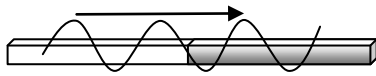
$$m \frac{d^2\xi}{dt^2} = -k\xi \Rightarrow \xi = \xi_{\max} \cos(\omega t) ; \omega = \sqrt{k/m}$$

Si bien esta ecuación describe el movimiento del extremo del muelle oscilando con una frecuencia ω , la experiencia nos dice que los dos muelles están oscilando con la misma frecuencia ω . En el contexto de masas de los muelles mucho menores que la masa móvil del extremo siempre podemos elegir muelles de distinto material y de masas muy distintas entre sí. En cualquier caso estos dos muelles resultan oscilar con la misma frecuencia ω que el muelle equivalente. Desde el punto de vista ondulatorio, que abordamos a continuación, debemos considerar una onda que pasa del muelle 1 al muelle 2 (y al revés); y según lo visto parece que debemos mantener la misma frecuencia para las ondas en el muelle 1 y el muelle 2. La literatura (*Alonso-Finn vol2*) acepta esto como un hecho experimental aplicable a todos los fenómenos ondulatorios asociados a la reflexión y refracción de ondas. Sin embargo esto solo es cierto en la medida en que los objetos que atraviesa la onda puedan considerarse en reposo relativo al observador. Si una onda, luz por ejemplo, se refleja en un espejo en reposo la frecuencia de la onda reflejada e incidente son las mismas. Pero si el espejo está en movimiento, la frecuencia de la onda reflejada *cambia* debido al *efecto Doppler* (ver sección 14); ya que según el principio de Huygens el espejo es un foco móvil emisor de ondas. En este fenómeno se basa la medida de velocidades por *RADAR*.

Planteamiento ondulatorio

Imaginemos una banda elástica formada por la unión de otras dos, una detrás de la otra, de igual sección pero distinto material, de modo que el modulo de elasticidad Y sea diferente. Análogamente el caso puede ser el de una cuerda formada por la unión

de otras dos, una detrás de la otra, pero con diferente densidad lineal. La situación es similar a la descrita en el dibujo, con dos bandas elásticas o cuerdas conectadas. Si un fenómeno ondulatorio se está propagando de izquierda a derecha parece evidente que puede pasar a la otra parte del sistema y seguir propagándose en la misma dirección.



Identifiquemos las funciones en las dos partes como $\xi^i(x-ct)$ a la izquierda y $\xi^d(x-ct)$ a la derecha. El valor de estas funciones corresponde a la elongación de cada punto x de la banda completa en el instante t . Si llamamos x_0 al punto frontera entre las dos partes del sistema, parece evidente que la elongación de este punto es única y por tanto las dos funciones anteriores deben coincidir en este punto:

$$\xi^i(x_0 - ct) = \xi^d(x_0 - ct)$$

Sin embargo aparece un problema físico en este punto. Sabemos que la energía elástica es proporcional a la constante elástica y al cuadrado de la elongación; y sabemos también que esta energía elástica se propaga junto con la onda de izquierda a derecha. Si, justo a derecha e izquierda de la superficie frontera, tenemos materiales de distinta constante elástica k y es, por ejemplo, $k_i < k_d$; entonces la condición de igual elongación en la superficie frontera supone un problema físico en relación al principio de conservación de la energía. En efecto, en un pequeño entorno a derecha e izquierda de x_0 la elongación será, por continuidad, sensiblemente similar a la elongación en x_0 , pero la energía elástica en el lado izquierdo será menor que en el lado derecho debido a la diferencia de constantes elásticas. Esto supone un aumento de energía cuando la onda pasa la superficie frontera, y no se ve la procedencia de esta energía adicional.

La solución general de la ecuación de onda y nuestro sentido de la causalidad solo nos deja la alternativa de suponer que, en la parte izquierda, no puede existir una sola onda incidente, sino que la superficie frontera debe ser la causa de una onda rebotada o reflejada moviéndose en la dirección contraria a la onda incidente: $\xi_r^i(x+ct)$. De este modo la condición para la elongación en la superficie frontera es

$$\xi_i^i(x_0 - ct) + \xi_r^i(x_0 + ct) = \xi_t^d(x_0 - ct)$$

donde el subíndice i indica onda incidente, el r onda reflejada y el t onda transmitida o refractada.

Si nos fijamos en el caso de la banda elástica, en el punto x_0 , o mejor dicho en la superficie frontera, la tensión de la banda debe ser la misma a un lado y a otro. Esto es necesario porque no podemos asignar masa en este caso a la superficie frontera entre las partes derecha e izquierda. Por tanto en el punto x_0 se debe verificar

$$T^i = Y^i S \left. \frac{\partial \xi_i^i(x-ct)}{\partial x} \right|_{x_0} + Y^i S \left. \frac{\partial \xi_r^i(x+ct)}{\partial x} \right|_{x_0} = T^d = Y^d S \left. \frac{\partial \xi_t^d(x-ct)}{\partial x} \right|_{x_0} \Rightarrow$$

$$Y^i \left(\left. \frac{\partial \xi_i^i(x-ct)}{\partial x} \right|_{x_0} + \left. \frac{\partial \xi_r^i(x+ct)}{\partial x} \right|_{x_0} \right) = Y^d \left. \frac{\partial \xi_t^d(x-ct)}{\partial x} \right|_{x_0}$$

Según el teorema de Fourier podemos descomponer en serie de senos y cosenos cualquier perturbación ondulatoria en un medio lineal. Por tanto será relevante ver el comportamiento físico de una sola componente senoidal en este caso; teniendo en

cuenta que las componentes funcionales de Fourier (senos, cosenos) actúan de forma físicamente independiente y no intercambian energía entre ellas. La elección de las ondas reflejada y transmitida debe ser tal que haya continuidad con los casos límite siguientes

1-Si el sistema de la derecha es un objeto no elástico y masivo la onda debe reflejarse totalmente y no existe componente transmitida. Este caso ya lo hemos visto antes.

2-Si el material de la derecha es muy parecido o igual al de la izquierda, entonces la onda es totalmente transmitida y no existe la componente reflejada.

Según estas condiciones podemos tomar la siguiente elección

$$\begin{aligned}\xi_i^i(x_0 - ct) &= \xi_i^i \text{sen}(\omega t - K^i x) \\ \xi_r^i(x_0 + ct) &= \xi_r^i \text{sen}(\omega t + K^i x) \\ \xi_t^d(x_0 - ct) &= \xi_t^d \text{sen}(\omega t - K^d x)\end{aligned}$$

donde mantenemos la misma frecuencia según lo discutido en la sección anterior. De esta forma, con los valores correspondientes para las amplitudes y vector de ondas asociados a la función seno podemos reproducir los casos límite antes señalados. Aplicando las condiciones de continuidad a estas ecuaciones y tomando por conveniencia $x_0 = 0$ tenemos

$$\begin{aligned}\xi_i^i + \xi_r^i &= \xi_t^d \\ Y^i K^i (\xi_i^i - \xi_r^i) &= Y^d K^d \xi_t^d\end{aligned}$$

lo que nos permite, a partir de la amplitud de la onda incidente ξ_i^i obtener la amplitud de la onda reflejada ξ_r^i y transmitida ξ_t^d . Por otro lado, a partir de la frecuencia y la velocidad de las ondas elásticas en las dos partes se pueden calcular los números de ondas K (mayúscula) a derecha e izquierda.

14-Ondas en líneas de transmisión eléctrica.

Piense el lector en la acción habitual de encender una bombilla eléctrica accionando un interruptor. Realmente parece que la bombilla se enciende al mismo tiempo que cerramos el interruptor. Pero esto no significa que los electrones se hayan movido desde el interruptor hasta la bombilla. Podemos estimar la velocidad de los electrones en un cable metálico por esta fórmula

$$j = \frac{I}{S} = nev \Rightarrow v = \frac{I}{neS}$$

donde n es la densidad de electrones de conducción, e la carga del electrón, S el área de la sección recta del cable, I es la intensidad de corriente en amperios y j la densidad de corriente. Para valores habituales de estos parámetros la velocidad v de los electrones resulta en un valor del orden de milímetros por segundo (mm/s). Es evidente que esto no cuadra con la rapidez con que se enciende la bombilla; lo que invalida la explicación propuesta. En cambio, cuando accionamos el interruptor lo que se produce es la propagación de una perturbación en forma de onda electromagnética

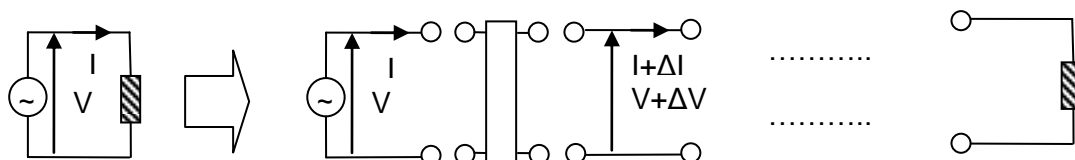
guiada por el cable. La velocidad de la onda está próxima a la velocidad de la luz, lo que explica la rapidez del proceso. Es la misma diferencia que la velocidad de un punto de la banda elástica y la velocidad de la onda elástica. En el caso de la banda elástica recordamos que la ley de Hooke es válida mientras la longitud de onda fuese mucho mayor que la longitud del muelle o banda elástica. De la misma forma las leyes de los circuitos de corriente alterna son válidas mientras la longitud de la onda electromagnética sea mucho mayor que las dimensiones físicas del circuito. Por ejemplo, en un circuito serie sencillo tenemos un valor único de la intensidad (I) que recorre el circuito y una caída de tensión (V) determinada por el generador. Pero si suponemos este mismo circuito de longitud indefinida, entonces la aproximación de la teoría de circuitos deja de ser válida. La inexistencia de acumulación de carga en los cables de un circuito eléctrico es una de las leyes de Kirchoff, pero podemos ver la necesidad física de acumulación de carga eléctrica (capacidad) en los circuitos de gran longitud de dos formas independientes:

1-Efecto capacitivo debido a resistencia eléctrica del cable no despreciable.

Una corriente eléctrica que entra en una resistencia es similar a una corriente de bolitas que cae en la atmósfera desde una altura y partiendo con una velocidad inicial. Debido a la fricción se produce un frenado hasta llegar a una velocidad constante llamada velocidad terminal. El frenado hace que la densidad de las bolitas aumente; en correspondencia esto significa una acumulación de carga en la resistencia; aunque en el caso eléctrico también hay una compensación debido a la repulsión entre cargas iguales, es posible la existencia de un efecto neto capacitivo asociado a la resistencia eléctrica.

2-Efecto capacitivo debido a que la velocidad de propagación de cualquier fenómeno físico no puede superar la velocidad de la luz en el vacío: En circuitos de larga distancia una modificación en la tensión e intensidad del generador no llega instantáneamente al extremo, sino que tarda un tiempo. Si el circuito está inicialmente desconectado del generador la intensidad es inicialmente cero. En un instante posterior a la conexión empieza a haber corriente en la línea, pero es posible que en zonas suficientemente alejadas la corriente siga siendo nula. Este argumento también es aplicable, en todo instante de tiempo, en caso de tener un generador de tensión variable en el circuito. Por tanto existirá una acumulación de carga en las zonas correspondientes del cable.

Podemos razonar por analogía con las ondas mecánicas y descomponer el sistema en secciones caracterizadas por una intensidad y tensión determinadas y un elemento de

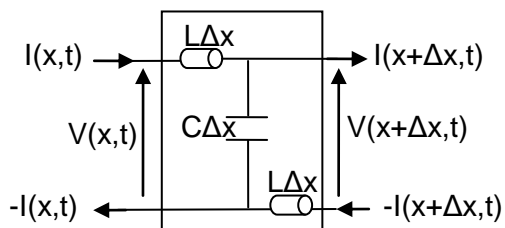


conexión con otras secciones a distinta intensidad y tensión. En el caso de las ondas mecánicas el elemento de conexión se representaba en forma de masa mecánica. En el caso eléctrico el elemento de conexión debe verificar las siguientes características:

1-Los cables ideales de la teoría de circuitos no almacenan energía electrostática. Dado que las intensidades en cada sección son distintas, el elemento de conexión debe tener cierta capacidad de acumular energía electrostática.

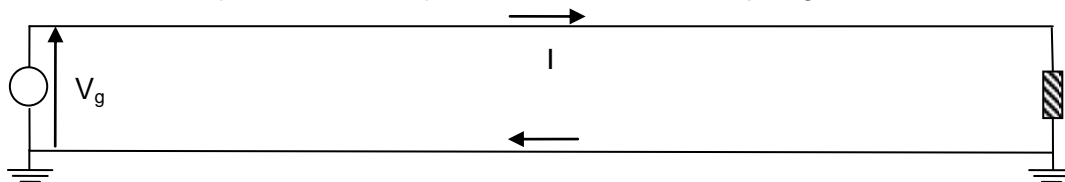
2-Los cables ideales de la teoría de circuitos no almacenan energía magnetostática. En la teoría clásica de circuitos esto se modela introduciendo una bobina que concentra la energía magnética del circuito. Por tanto el elemento de conexión debe tener cierta capacidad de acumular energía magnetostática.

3-Los cables ideales de la teoría de circuitos tienen resistencia nula, lo cual supone incluir los correspondientes componentes resistivos en el elemento de conexión. Sin embargo en primera aproximación podemos considerar que estas resistencias son despreciables.

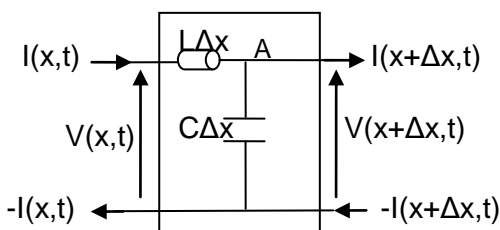


Con estas consideraciones podemos modelar el elemento de conexión con un condensador en paralelo y una bobina en serie. Los parámetros L y C son la autoinducción y la capacidad por unidad de longitud del circuito. Si suponemos la línea

homogénea en todas sus secciones estos parámetros serán constantes. El modelo del dibujo refleja la simetría de la línea de transmisión; sin embargo de cara a obtener las ecuaciones diferenciales utilizaremos un modelo asimétrico en el que modelamos la línea de abajo como una toma de tierra a potencial constante a lo largo de toda la línea; de modo que la línea completa es como la del dibujo siguiente



El cable inferior de retorno al generador se conecta a tierra de modo que la tensión sea constante en toda su longitud. Además suponemos que el contacto a tierra tiene una resistencia eléctrica infinita, por lo que toda la corriente circula por el cable inferior; esto equivale a suponer que la resistencia eléctrica del cable inferior es cero y solo presenta resistencia el cable superior. Veremos mas adelante que es sencillo estudiar la línea simétrica una vez encontradas las ecuaciones diferenciales generales.



El dibujo adjunto representa una sección del circuito ideal. Debido a la homogeneidad del circuito la conservación de carga indica que la carga acumulada en la sección de cable superior se cancela con la acumulada en la misma sección del cable inferior y por tanto las corrientes en el cable superior y el inferior

son simétricas. Esta simetría de corriente permite también asignar una autoinducción total equivalente L al cable superior. Con estas consideraciones podemos aplicar las leyes de circuitos a la sección de esta forma:

1-Conservación de la corriente en la conexión A :La corriente que llega del componente L mas la que llega del condensador corresponde a la corriente de salida

$$I(x,t) + I_C = I(x + \Delta x, t)$$

Para tener una corriente de salida del condensador la tensión debe disminuir con el tiempo entre sus placas, y dado que la tensión del cable inferior es constante tenemos

$$I(x,t) - C\Delta x \left. \frac{\partial V}{\partial t} \right|_{x+\Delta x} = I(x + \Delta x, t)$$

2-Incremento de tensión nula en el cable inferior. Partiendo del extremo inferior izquierdo y en el sentido de las agujas del reloj tenemos

$$-V(x,t) + V_L + V(x + \Delta x, t) = 0$$

donde V_L corresponde a una caída de tensión en la bobina. Según la ley de Lenz, un cambio de tensión en la bobina supone una variación en el tiempo de la intensidad que la recorre; y este cambio de tensión tiende a oponerse a dicha variación de la corriente absorbiendo parte de los cambios de tensión externa

$$-V(x,t) + L\Delta x \left. \frac{\partial I(x,t)}{\partial t} \right|_x + V(x + \Delta x, t) = 0$$

Tomando el límite cuando $\Delta x \rightarrow 0$ de los resultados de 1 y 2 tenemos

$$-C \left. \frac{\partial V}{\partial t} \right|_x = \left. \frac{\partial I}{\partial x} \right|_t ; -L \left. \frac{\partial I}{\partial t} \right|_x = \left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_t$$

Ecuaciones de las que se deduce

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \frac{1}{LC} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} ; \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} = \frac{1}{LC} \frac{\partial^2 I}{\partial x^2}$$

lo que significa que tanto la tensión como la intensidad evolucionan como ondas que se mueven a una velocidad $1/\sqrt{LC}$ a lo largo de la línea de transmisión. Un tratamiento que incluya la resistencia pasa por incorporar al elemento de conexión una *resistencia en serie* con la bobina : $R\Delta x$ y una *conductancia en paralelo* con el condensador : $G\Delta x$; lo que conduce a las *ecuaciones del Telégrafo*

$$\boxed{-C \left. \frac{\partial V}{\partial t} \right|_x - GV = \left. \frac{\partial I}{\partial x} \right|_t ; -L \left. \frac{\partial I}{\partial t} \right|_x - IR = \left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_t}$$

de las que se deducen dos ecuaciones diferencias para V, I

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + (RC + GL) \frac{\partial V}{\partial t} + GRV ; \quad \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} + (RC + GL) \frac{\partial I}{\partial t} + GRI$$

Si el generador de tensión produce una onda sinusoidal pura de frecuencia determinada, entonces V_t, I_t oscilarán con la misma frecuencia. En una sección de la línea de transmisión a distancia x del generador podemos representar la tensión y corriente mediante los fasores habituales de los circuitos de alterna: $V(x,t)=V_x(x)\exp(i\omega t)$; $I(x,t)=I_x(x)\exp(i\omega t)$. Esto supone una solución con separación de variables: $V(x,t)=V_x(x)V_t(t)$, $V(t)=\exp(i\omega t)$; $I(x,t)=I_x(x)I_t(t)$, $I(t)=\exp(i\omega t)$; si tomamos κ^2 como la constante de la separación de variables tenemos

$$\frac{1}{V_x} \frac{d^2 V_x}{dx^2} = \kappa^2 = \frac{1}{V_t} \left(LC \frac{d^2 V_t}{dt^2} + (RC + GL) \frac{dV_t}{dt} + GRV_t \right) ; \quad \frac{1}{I_x} \frac{d^2 I_x}{dx^2} = \kappa^2 = \frac{1}{I_t} \left(LC \frac{d^2 I_t}{dt^2} + (RC + GL) \frac{dI_t}{dt} + GRI_t \right)$$

$$\left. \begin{aligned} \kappa^2 &= -LC\omega^2 + i(RC + GL)\omega + GR = (\gamma + ik)^2 \\ k^2 - \gamma^2 &= LC\omega^2 - GR \\ 2k\gamma &= (RC + GL)\omega \end{aligned} \right\}$$

Lo que conduce a $V_x(x)$ de la forma

$$\frac{d^2 V_x}{dx^2} = [\pm(\gamma + ik)]^2 V_x \Rightarrow V_x(x) = V_- \exp((\gamma + ik)x) + V_+ \exp(-(\gamma + ik)x)$$

Por tanto el fasor completo será

$$V(x,t) = V_x(x)V_t(t) = V_- \exp((\gamma + ik)x)\exp(i\omega t) + V_+ \exp(-(\gamma + ik)x)\exp(i\omega t) \Rightarrow$$

$$V(x,t) = V_+ \exp(-\gamma x)\exp[i(\omega t - kx)] + V_- \exp(\gamma x)\exp[i(\omega t + kx)]$$

donde podemos ver la combinación de una onda progresiva asociada al factor V_+ y una onda regresiva asociada al factor V_- ; podemos ver la onda regresiva como el rebote de la onda progresiva actuando sobre una carga o impedancia que está conectada al extremo de la línea pero no en *resonancia*. La amplitud de la onda progresiva disminuye a medida que avanza en la línea (amortiguación); pero la onda regresiva también disminuye su amplitud al acercarse al generador.

La solución encontrada también debe verificar las ecuaciones del Telégrafo

$$-C \frac{\partial V}{\partial t} \Big|_x - GV = \frac{\partial I}{\partial x} \Big|_t ; \quad -L \frac{\partial I}{\partial t} \Big|_x - IR = \frac{\partial V}{\partial x} \Big|_t$$

introduciendo en la 2ª ecuación del Telégrafo el resultado $V(x,t)$ y la forma del fasor de intensidad se obtiene

$$I(x,t) = \frac{\gamma + ik}{R + iL\omega} \{V_+ \exp(-\gamma x)\exp[i(\omega t - kx)] - V_- \exp(\gamma x)\exp[i(\omega t + kx)]\}$$

y utilizando la primera ecuación con los resultados conocidos tenemos

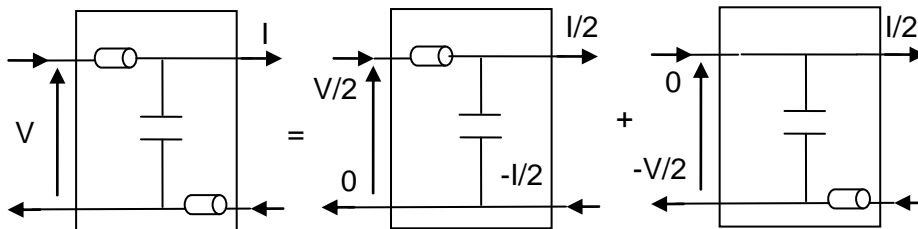
$$(\gamma + ik)^2 = (iC\omega + G)(R + iL\omega) = -LC\omega^2 + i(RC + GL)\omega + GR$$

Por tanto los valores de intensidad y tensión en la línea son

$$V(x,t) = V_+ \exp(-\gamma x) \exp[i(\omega t - kx)] + V_- \exp(\gamma x) \exp[i(\omega t + kx)]$$

$$I(x,t) = \sqrt{\frac{G + iC\omega}{R + iL\omega}} \{V_+ \exp(-\gamma x) \exp[i(\omega t - kx)] - V_- \exp(\gamma x) \exp[i(\omega t + kx)]\}$$

En este punto podemos solucionar el caso de la línea simétrica utilizando el carácter *lineal* de las ecuaciones diferenciales del Telégrafo. En efecto podemos ver una línea simétrica como una suma lineal de dos líneas asimétricas de esta forma



de modo que las tensiones y corrientes del caso simétrico equivalen a multiplicar por dos las del caso asimétrico que hemos desarrollado; y por tanto no hay una diferencia esencial entre el caso simétrico y el asimétrico.

Para valores de la resistencia mucho menores respecto a la impedancia inductiva y capacitiva : $R \ll L\omega$, $G \ll C\omega$ podemos hacer una primera aproximación de esta forma

$$\left. \begin{aligned} k^2 - \gamma^2 &= LC\omega^2 - GR \\ 2k\gamma &= (RC + GL)\omega \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} k^2 &\approx LC\omega^2 \\ \gamma &\approx \frac{RC + GL}{2\sqrt{LC}} \end{aligned} \right\}$$

Esta aproximación tiene una característica importante y es que ni la velocidad de propagación de la onda k/ω , ni la amortiguación de la onda y dependen de la frecuencia ω . Si la línea de transmisión es recorrida, no por una onda de frecuencia pura, sino por una señal con un espectro de Fourier de frecuencias como puede ser una señal telefónica, entonces en esta aproximación una línea homogénea trata de la misma forma a todas las componentes en frecuencia: su velocidad de transmisión es la misma y su amortiguación también es la misma. El resultado es que la señal al final de la línea no llega distorsionada, solo reducida en intensidad. Esta aproximación es válida para bajas frecuencias y resistencias, para componentes de la señal de alta frecuencia pueden aparecer problemas debido a que la resistencia del cable aumenta con la frecuencia (efecto pelicular), la velocidad de la onda y la amortiguación de la onda pasan a depender de su frecuencia, la línea de transmisión actúa dispersando las componentes en frecuencia y distorsiona la señal cambiando el contenido energético relativo de cada componente en frecuencia del espectro de Fourier de la señal; lo que puede dificultar la comprensión de la comunicación. Si se conocen las

propiedades de la línea de transmisión se pueden introducir en ella dispositivos *ecualizadores* que compensen este problema o utilizar cables especiales para compensar el efecto pelicular.

Los valores exactos de k y γ son soluciones de las siguientes ecuaciones cuárticas

$$\left. \begin{aligned} (1) \quad k^2 - \gamma^2 &= LC\omega^2 - GR \\ (2) \quad 2k\gamma &= (RC + GL)\omega \end{aligned} \right\} \Rightarrow k^2 - \left(\frac{RC + GL}{2k} \right)^2 \omega^2 = LC\omega^2 - GR \Rightarrow$$

$$\boxed{k^4 - (LC\omega^2 - GR)k^2 - \left(\frac{RC + GL}{2} \omega \right)^2 = 0}$$

multiplicando por $(2\gamma)^4$ este resultado y eliminando las potencias correspondientes mediante la ecuación (2)

$$16\gamma^4 k^4 - 16\gamma^4 k^2 (LC\omega^2 - GR) - 16\gamma^4 \left(\frac{RC + GL}{2} \omega \right)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{\gamma^4 + (LC\omega^2 - GR)\gamma^2 + \left(\frac{RC + GL}{2} \omega \right)^2 = 0}$$

El límite en que $\omega \rightarrow 0$, y por tanto $k \rightarrow 0$, la línea de transmisión se conecta a una fuente de corriente continua y las soluciones para la tensión e intensidad son

$$V(x) = V_+ \exp(-\gamma x) + V_- \exp(\gamma x) ; I(x) = \sqrt{\frac{G}{R}} \{V_+ \exp(-\gamma x) - V_- \exp(\gamma x)\}$$

Si consideramos despreciable la auto-inducción L de la línea, la ecuación de onda queda una ecuación que depende solo de términos resistivos y capacitivos

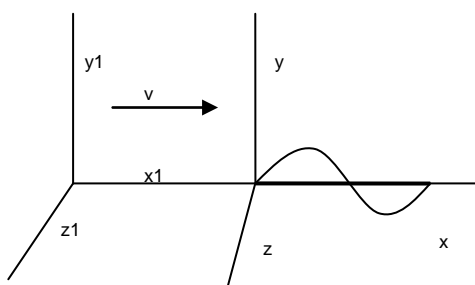
$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = RC \frac{\partial V}{\partial t} + GRV ; \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = RC \frac{\partial I}{\partial t} + GRI$$

ecuaciones similares a la *ecuación de conducción del calor de Fourier* (ver trabajo sobre termodinámica) y con soluciones semejantes. Las ecuaciones anteriores fueron la primera aproximación para el problema de las líneas de transmisión y el modelo utilizado en el tendido del primer cable de comunicaciones submarino entre Europa y Estados Unidos en 1858.

15-Ondas y relatividad especial. Efecto Doppler.

Caso de una dimensión

Imaginemos dos sistemas de coordenadas inerciales (x_1, y_1, z_1, t_1) y (x, y, z, t) de ejes



paralelos moviéndose relativamente a velocidad v sobre la dirección del eje $\langle x-x_1 \rangle$ común. Sobre el eje $\langle x \rangle$ del sistema (x, y, z, t) hay una cuerda en reposo que se

pulsa, generando un proceso ondulatorio. En (x,y,z,t) las posibles soluciones de la ecuación de ondas son una combinación lineal de funciones de la forma $y(x-u^*t)$, donde u es un valor positivo o negativo correspondiente a la velocidad de la onda en (x,y,z,t) . Todas estas funciones cumplen la ecuación de ondas en el sistema (x,y,z,t)

$$u^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Big|_t = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Big|_x$$

La ecuación está expresada en términos de los operadores diferenciales, indicando de esta forma que vamos a operar exclusivamente con funciones que verifiquen la ecuación de ondas anterior.

En el sistema de coordenadas 1 la onda se describe en este caso utilizando la relación $(x,y,z,t) \rightarrow (x_1,y_1,z_1,t_1)$ entre sistemas inerciales de modo que podamos poner $y_1(x_1,t_1) - u^*t(x_1,t_1)$ como representación del fenómeno ondulatorio en las coordenadas del sistema inercial 1. Nuestro objetivo es comprobar que esta función verifica también la ecuación de ondas en las coordenadas del sistema 1.

Como vimos en el trabajo “Espacio, tiempo, materia y vacío”, según la relatividad especial la relación entre coordenadas de los dos sistemas es la transformación de Lorentz

$$x = \gamma(x_1 - vt_1); y = y_1; t = \gamma(t_1 - \frac{v}{c^2}x_1); \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

A partir de aquí, podemos calcular la *regla de transformación de las derivadas parciales* correspondiente con la transformación de coordenadas utilizando la regla de la cadena sobre una función matemática arbitraria $f(x(x_1,t_1),t(x_1,t_1))$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1} \Big|_{t_1} &= \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_t \frac{\partial x}{\partial x_1} \Big|_{t_1} + \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_x \frac{\partial t}{\partial x_1} \Big|_{t_1} = \gamma \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_t - \gamma \frac{v}{c^2} \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_x \\ \frac{\partial f}{\partial t_1} \Big|_{x_1} &= \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_t \frac{\partial x}{\partial t_1} \Big|_{x_1} + \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_x \frac{\partial t}{\partial t_1} \Big|_{x_1} = -\gamma v \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_t + \gamma \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_x \end{aligned}$$

Puesto que estas expresiones se verifican para cualquier función $f(x,t)$ sea o no una solución de la ecuación de ondas, podemos poner el resultado en forma de operadores

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_{t_1} &= \gamma \frac{\partial}{\partial x} \Big|_t + \gamma \frac{v}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \Big|_x \\ \frac{\partial}{\partial t_1} \Big|_{x_1} &= \gamma \frac{\partial}{\partial t} \Big|_x + \gamma v \frac{\partial}{\partial x} \Big|_t \end{aligned}$$

Esta relación es la transformación de Lorentz para las derivadas parciales en los dos sistemas de coordenadas. Note el lector el signo positivo asociado a la velocidad relativa v ; en contraste con el signo negativo en la transformación de Lorentz para las coordenadas (x,y,z,t) . Esta forma nos facilita una aplicación reiterada del operador para calcular las derivadas segundas correspondientes

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2_1} \Big|_{t_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_{t_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_{t_1} = \left(\gamma \frac{\partial}{\partial x} \Big|_t + \gamma \frac{v}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \Big|_x \right) \left(\gamma \frac{\partial}{\partial x} \Big|_t + \gamma \frac{v}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \Big|_x \right)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2_1} \Big|_{x_1} = \frac{\partial}{\partial t_1} \Big|_{x_1} \frac{\partial}{\partial t_1} \Big|_{x_1} = \left(\gamma v \frac{\partial}{\partial x} \Big|_t + \gamma \frac{\partial}{\partial t} \Big|_x \right) \left(\gamma v \frac{\partial}{\partial x} \Big|_t + \gamma \frac{\partial}{\partial t} \Big|_x \right)$$

Desarrollando las expresiones anteriores, aplicando la operación encontrada a la función $y_1=y(x_1,t_1), -u^*t(x_1,t_1)$ y dado que en (x,y,z,t) la función utilizada verifica la ecuación de ondas

$$u^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Big|_t = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Big|_x \quad \text{Llegamos a}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2_1} \Big|_{t_1} = \gamma^2 \left(1 + \frac{v^2 u^2}{c^4} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Big|_t + 2\gamma^2 \frac{v}{c^2} \frac{\partial}{\partial x} \Big|_t \frac{\partial}{\partial t} \Big|_x$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2_1} \Big|_{x_1} = \gamma^2 (v^2 + u^2) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Big|_t + 2\gamma^2 v \frac{\partial}{\partial x} \Big|_t \frac{\partial}{\partial t} \Big|_x$$

Note ahora el lector que cualquier función de la forma $f(x-ut)$ que verifique la ecuación de ondas en (x,y,z,t) también verifica *necesariamente* esta otra ecuación en términos operacionales

$$\frac{\partial}{\partial x} \Big|_t \frac{\partial}{\partial t} \Big|_x = -u \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Big|_t$$

Sustituyendo esto en las ecuaciones anteriores podemos eliminar $\partial^2/\partial x^2$ y llegamos al siguiente operador

$$\left(\frac{u-v}{1-\frac{vu}{c^2}} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2_1} \Big|_{t_1} = \frac{\partial^2}{\partial t^2_1} \Big|_{x_1}$$

Lo que nos dice que la onda original, en el sistema (x,y,z,t) , transformada al sistema en (x_1,y_1,z_1,t_1) también cumple la ecuación de ondas en este último sistema de coordenadas; pero con una velocidad de propagación correspondiente a la suma relativista de velocidades; que para velocidades mucho menores a la velocidad de la luz ($u \ll c$) corresponde a la suma clásica de velocidades.

Caso de dos dimensiones

Supongamos que en el plano x-z existe una onda plana bidimensional que verifica una ecuación del tipo $y=f(\mathbf{k}^* \mathbf{r} - \omega t)$, donde $\mathbf{r}=(x,y,z)$, \mathbf{k} es el vector de onda y ω la frecuencia angular. La expresión funcional anterior se puede poner, sin pérdida de generalidad, como $y=f(\mathbf{W}^* \mathbf{r} - t)$; simplemente dividiendo el argumento de la función por ω y haciendo $\mathbf{W}=\mathbf{k}/\omega$. En el sistema 1 el fenómeno se describe por $y_1=y=f(\mathbf{W}^* \mathbf{r}_1 - t_1)$.

Análogamente al caso anterior, la transformación de operadores asociada a la transformación de Lorentz nos lleva a

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Big|_{t_1, z_1} &= \gamma^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \Big|_{t, z} + \frac{v^2}{c^4} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Big|_{x, z} + 2 \frac{v}{c^2} \frac{\partial}{\partial x} \Big|_{t, z} \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{x, z} \right) \\ \frac{\partial^2}{\partial z^2} \Big|_{t_1, x_1} &= \frac{\partial^2}{\partial z^2} \Big|_{t, x} \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Big|_{x_1, z_1} &= \gamma^2 \left(v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Big|_{t, z} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Big|_{x, z} + 2v \frac{\partial}{\partial x} \Big|_{t, z} \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{x, z} \right) \end{aligned}$$

Para una función cualquiera de la forma $y=f(W*r-t)$ se verifica lo siguiente

$$\frac{\partial}{\partial x} \Big|_{t, z} \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{x, z} = -W_x \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Big|_{x, z} ; \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Big|_{t, z} = W_x^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Big|_{x, z} ; \frac{\partial^2}{\partial z^2} \Big|_{t, x} = W_z^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Big|_{x, z}$$

Que sustituido en las ecuaciones previas produce

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Big|_{t_1, z_1} &= \gamma^2 \left(W_x^2 + \frac{v^2}{c^4} - 2 \frac{v W_x}{c^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Big|_{x, z} \\ \frac{\partial^2}{\partial z^2} \Big|_{t_1, x_1} &= W_z^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Big|_{x, z} \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Big|_{x_1, z_1} &= \gamma^2 (v^2 W_x^2 + 1 - 2v W_x) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Big|_{x, z} \end{aligned}$$

Sumando las dos primeras ecuaciones y dividiendo por la tercera

$$\frac{\frac{\partial^2}{\partial x^2} \Big|_{t_1, z_1} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \Big|_{t_1, x_1}}{\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Big|_{x_1, z_1}} = \frac{\gamma^2 \left(W_x^2 + \frac{v^2}{c^4} - 2 \frac{v W_x}{c^2} \right) + W_z^2}{\gamma^2 (v^2 W_x^2 + 1 - 2v W_x)} = \frac{\left(W_x - \frac{v}{c^2} \right)^2 + (\gamma^{-1} W_z)^2}{(1 - v W_x)^2}$$

y por tanto la onda transformada según las coordenadas del sistema 1 también verifica la ecuación de ondas de esta forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Big|_{t_1, z_1} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \Big|_{t_1, x_1} &= W_1^2 \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} \Big|_{x_1, z_1} ; W_{x_1} = \frac{W_x - \frac{v}{c^2}}{1 - v W_x} ; W_{z_1} = \frac{\gamma^{-1} W_z}{1 - v W_x} \\ \bar{W}_1 &= \frac{\bar{k}_1}{\omega_1} \end{aligned}$$

El lector puede comprobar que el parámetro W corresponde con la *covelocidad* mencionada en el trabajo “Espacio, tiempo, materia y vacío”. Para el caso de una onda electromagnética en el vacío ,los módulos W , W_1 son iguales a $1/c$; la inversa de la velocidad de la luz en el vacío. Considerando $W_x=W\cos(\varphi)$ y $W_{x_1}=W\cos(\varphi_1)$ es fácil derivar de las expresiones anteriores la fórmula del fenómeno conocido en astronomía como *aberración relativista* de un rayo de luz:

$$\cos(\varphi) = \frac{\cos(\varphi_1) - \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c} \cos(\varphi_1)}$$

En un caso unidimensional, para que las ecuaciones de onda coincidan debe ser $W=1/u$, de modo que también se cumple la relación

$$\frac{W - \frac{v}{c^2}}{1 - vW} = \frac{1 - \frac{vu}{c^2}}{u - v}$$

También podemos deducir el *efecto Doppler clásico no relativista* con las aproximaciones adecuadas. Para una onda física que atraviese un medio material, la *longitud de onda* λ corresponde a una *medida espacio-simultánea* en relatividad², similar a la longitud de un segmento rígido, y para bajas velocidades respecto a la luz puede considerarse igual para cualesquiera dos observadores inerciales en movimiento relativo al ser la *contracción de Lorentz* despreciable : $\lambda_r \approx \lambda_o$; donde tomaremos el subíndice r indicando el sistema de coordenadas en el que el medio de propagación de la onda está en reposo y el subíndice o indicando al observador en movimiento relativo. Para ondas moviéndose a bajas velocidades respecto a la luz , con el comportamiento descrito de la longitud de onda y sumando las ecuaciones de transformación de la covelocidad, elevadas al cuadrado, tenemos

$$\left. \begin{aligned} W_x^o &\approx \frac{W_x^r}{1 - vW_x^r} \equiv \frac{k_x^o}{\omega^o} \approx \frac{\frac{k_x^r}{\omega^r}}{1 - v\frac{k_x^r}{\omega^r}} \\ W_z^o &\approx \frac{W_z^r}{1 - vW_x^r} \equiv \frac{k_z^o}{\omega^o} \approx \frac{\frac{k_z^r}{\omega^r}}{1 - v\frac{k_x^r}{\omega^r}} \end{aligned} \right\} ; \left. \begin{aligned} (k_x^o)^2 + (k_z^o)^2 &= \left(\frac{2\pi}{\lambda_o}\right)^2 \approx \left(\frac{2\pi}{\lambda_r}\right)^2 = (k_x^r)^2 + (k_z^r)^2 = k^2 \Rightarrow \\ \frac{k^2}{(\omega^o)^2} &\approx \frac{\frac{k^2}{(\omega^r)^2}}{\left(1 - v\frac{k_x^r}{\omega^r}\right)^2} \Rightarrow \omega^o \approx \omega^r \left(1 - v\frac{k_x^r}{\omega^r}\right) \end{aligned} \right\}$$

si en el sistema de coordenadas r el medio *de propagación de la onda* está en reposo, entonces el cociente k/ω corresponde a la inversa de la velocidad de propagación de la onda V_r respecto a su propio medio, y v es la velocidad del observador en movimiento relativo

$$\omega_o \approx \omega_r \left(1 - \frac{v}{V_r} \cos(\theta)\right) = \omega_r \left(1 - \frac{\bar{v} \cdot \bar{V}_r}{(V_r)^2}\right)$$

donde θ es el ángulo entre los *vectores k (o V_r)* y v ; y este ángulo puede ser menor o mayor de $\pi/2$ (coseno negativo) según la dirección relativa de los vectores en la zona de observación. En la fórmula anterior hay dos posibilidades respecto al *foco* que produce las ondas:

Caso 1-El foco está en reposo en relación al medio de propagación y emite a la frecuencia ω_r^o

$$\omega_o \approx \omega_r^o \left(1 - \frac{\bar{v} \cdot \bar{V}_r}{(V_r)^2}\right)$$

ω_o corresponde a la frecuencia alterada percibida por el observador móvil.

² ver el trabajo “Espacio, tiempo, materia y vacío”

Caso 2-El foco está en movimiento en relación al medio de propagación con una velocidad v_f . En este caso repetimos la transformación de velocidades, pero ahora entre el sistema de coordenadas r en reposo con el medio de propagación y el sistema de coordenadas inercial asociado al foco, donde la frecuencia será ω_r^0 correspondiente al foco en reposo

$$\omega_r^0 \approx \omega_r^1 \left(1 - \frac{\bar{v}_f \bullet \bar{V}_r}{(V_r)^2} \right)$$

ω_r^1 corresponde a la frecuencia alterada percibida en el sistema r por efecto del movimiento de la fuente. Dado que la velocidad de propagación de la onda se mantiene constante en r en los casos 1 y 2 tenemos $V_r = \omega_r^1 / k_r^1 = \omega_r^0 / k_r^0$. Por tanto, visto desde el sistema de coordenadas en reposo con el medio, al ponerse en movimiento la fuente no solo se modifica la frecuencia ω sino también el vector de onda k y por tanto la longitud de onda; aunque esta sigue siendo la misma para todos los observadores a bajas velocidades respecto a la luz. Sobre el signo del coseno hay que hacer la misma consideración que en el caso 1: según la fuente se acerque o aleje de la onda; lo cual depende del punto de vista del observador: si la fuente se acerca o se aleja del observador.

Si combinamos ambos casos : movimiento respecto al medio de propagación de la onda de ambos : observador(v) y fuente(v_f), debemos hacer el cambio de ω_r^0 en la ecuación del caso 1 por ω_r^1 de la ecuación del caso 2:

$$\omega_o \approx \omega_r^0 \frac{1 - \frac{\bar{v} \bullet \bar{V}_r}{(V_r)^2}}{1 - \frac{v_f \bullet \bar{V}_r}{(V_r)^2}}$$

si se verifica además $v_f \ll V_r$ tenemos una segunda aproximación

$$\omega_o \approx \omega_r^0 \left(1 - \frac{(\bar{v} - \bar{v}_f) \bullet \bar{V}_r}{(V_r)^2} \right)$$

que corresponde al fenómeno del efecto Doppler clásico; y vemos que puede deducirse completamente del *principio de relatividad*.

15-Apéndice Matemático

El muelle sin masa.

En los cursos elementales de física se enseña que la energía elástica de un muelle es de la forma $\frac{1}{2}k(x-x_0)^2$. Imaginemos un muelle con dos masas en sus extremos. El conjunto oscila en una línea recta que podemos tomar como eje x de nuestro sistema de medidas. Una aplicación evidente de la conservación de la energía nos convence de que la energía del sistema debe ser (ver dibujo)

$$E = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \frac{1}{2}k(x_2 - x_1 - l_0)^2$$

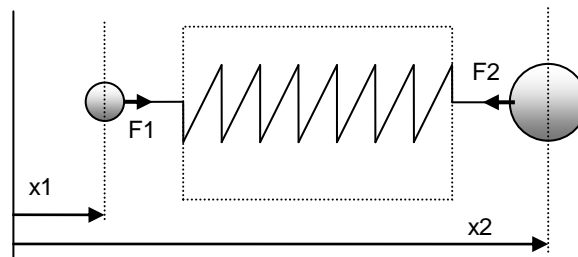
donde x_1, x_2 es la posición en el eje x de las masas, l_0 es la longitud del muelle cuando no está sometido a tensión y v_1, v_2 son las velocidades de las masas. Pero esta expresión de la energía, intuitivamente evidente, presupone que estamos despreciando la masa del muelle. La suma de fuerzas que las masas de los extremos ejercen sobre el muelle deben equivaler al producto de la masa del muelle por la aceleración del centro de masas del muelle. Si anulamos la masa del muelle tenemos que las fuerzas en los extremos del muelle suman cero y deben ser iguales y de signo opuesto. Por acción-reacción lo mismo ocurre con las fuerzas que el muelle hace sobre las masas : $F_1 = -F_2$. En este contexto de masa del muelle nula, la energía cinética del sistema será

$$\int F_1 \cdot dx_1 + \int F_2 \cdot dx_2 = \int m_1 a_1 \cdot dx_1 + \int m_2 a_2 \cdot dx_2 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + C$$

donde a_1, a_2 son las aceleraciones correspondientes y C es una constante de integración. Según las conclusiones previas podemos calcular la integral anterior aplicando la ley dinámica de fuerzas del muelle ideal sin masa, o *ley diámica de Hooke*, como

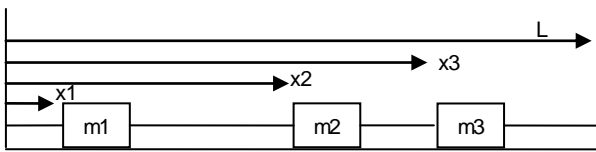
$$\begin{aligned} -\int F_2 \cdot dx_1 + \int F_2 \cdot dx_2 &= \int F_2 \cdot d(x_2 - x_1) = -\int k(x_2 - x_1 - l_0) \cdot d(x_2 - x_1) = \\ &= -\int k(x_2 - x_1 - l_0) \cdot d(x_2 - x_1 - l_0) = -\frac{1}{2}k(x_2 - x_1 - l_0)^2 + C' \end{aligned}$$

donde l_0 es una constante, por lo que podemos incluirla dentro del diferencial; C' es otra constante de integración. Igualando las dos fórmulas anteriores llegamos al principio de conservación de la energía enunciado al principio y que se ha aceptó intuitivamente sin el análisis necesario.



Oscilaciones Acopladas y Sistemas Lineales

Analicemos un sistema mas complejo formado por cuatro muelles que conectan tres



masas según el dibujo; masas que consideramos aproximadamente puntuales o de dimensiones mucho menores que las medidas x . Los muelles, representados por líneas rectas entre las masas, tienen la

misma longitud de reposo l_0 y la longitud total del recinto es L . Según el sistema de coordenadas elegido, la fórmula para la fuerza del muelle (*ley de Hooke*) llevará un signo negativo para el extremo derecho de cada muelle y un signo positivo para el extremo izquierdo. Aplicando la 2ª ley de Newton a cada masa tenemos

$$\left. \begin{aligned} m_1 a_1 &= -k_1(x_1 - l_0) + k_2(\{x_2 - x_1\} - l_0) \\ m_2 a_2 &= -k_2(\{x_2 - x_1\} - l_0) + k_3(\{x_3 - x_2\} - l_0) \\ m_3 a_3 &= -k_3(\{x_3 - x_2\} - l_0) + k_4(\{L - x_3\} - l_0) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} m_1 \delta^2 x_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 &= (k_1 - k_2)l_0 = c_1 \\ m_2 \delta^2 x_2 + (k_2 + k_3)x_2 - k_3 x_3 - k_2 x_1 &= (k_2 - k_3)l_0 = c_2 \\ m_3 \delta^2 x_3 + (k_3 + k_4)x_3 - k_3 x_2 &= (k_3 - k_4)l_0 + k_4 L = c_3 \end{aligned}$$

donde el símbolo δ corresponde al operador de derivación en el tiempo d/dt y δ^2 es la derivada segunda d^2/dt^2 . Los valores c_i son constantes definidas por conveniencia. La resolución del sistema anterior depende de operaciones lineales como multiplicación de una ecuación por una constante y suma de una ecuación con otra. Pongamos el resultado anterior en forma de producto de matrices³

$$\begin{pmatrix} m_1 \delta^2 + (k_1 + k_2) & -k_2 & 0 \\ -k_2 & m_2 \delta^2 + (k_2 + k_3) & -k_3 \\ 0 & -k_3 & m_3 \delta^2 + (k_3 + k_4) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

Calculemos la solución para x_1 mediante una versión de la *regla de Rouché* para sistemas de ecuaciones lineales de esta forma

$$\left| \begin{array}{ccc|ccc} m_1 \delta^2 + (k_1 + k_2) & -k_2 & 0 & c_1 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & m_2 \delta^2 + (k_2 + k_3) & -k_3 & c_2 & m_2 \delta^2 + (k_2 + k_3) & -k_3 \\ 0 & -k_3 & m_3 \delta^2 + (k_3 + k_4) & c_3 & -k_3 & m_3 \delta^2 + (k_3 + k_4) \end{array} \right| x_1 =$$

donde a la izquierda tenemos el determinante de la matriz que actúa como operador sobre x_1 y a la izquierda tenemos el determinante de la matriz que sustituye la columna correspondiente, la primera en este caso, por la columna de constantes c_1, c_2, c_3 . Para calcular los productos asociados a estos determinantes hay que tener en cuenta que al multiplicar una constante por el operador δ , la constante pasa a la izquierda del operador, salvo que esta constante incluya un valor c_1, c_2, c_3 ; en cuyo caso δ actúa sobre este valor c_i constante y por tanto el producto correspondiente vale cero. Con estas condiciones resulta para x_1 esta ecuación diferencial

$$\left\{ [m_1 \delta^2 + (k_1 + k_2)][m_2 \delta^2 + (k_2 + k_3)][m_3 \delta^2 + (k_3 + k_4)] - k_3^2 [m_1 \delta^2 + (k_1 + k_2)] - k_2^2 [m_3 \delta^2 + (k_3 + k_4)] \right\} x_1 = (k_2 + k_3)(k_3 + k_4)c_1 + k_2 k_3 c_3 + k_2 c_2 (k_3 + k_4) - k_3^2 c_1$$

³ También puede incluirse fuerzas de rozamiento proporcionales a la velocidad que serán de la forma $-\mu \delta x_i$, $i=1,2,3$

que es una ecuación diferencial de 6º orden y que requiere para su solución de 6 condiciones iniciales, correspondientes a las posiciones y velocidades iniciales de cada una de las masas.

Este método se puede aplicar también para manejar las ecuaciones diferenciales de circuitos eléctricos RLC lineales; siempre con el cuidado debido a la hora de calcular los determinantes. En este caso los valores c_i pueden incluir funciones del tiempo correspondientes a las fuentes de tensión del circuito y la acción del operador δ será producir la derivada correspondiente.

En el resultado anterior hacemos el cambio $x_1 = x'_1 + \alpha_1$, donde α_1 es una constante elegida convenientemente para cancelar el segundo miembro y que representa la posición de m_1 cuando el sistema está en equilibrio estático. De este modo tenemos

$$\{m_1\delta^2 + (k_1 + k_2)\} [m_2\delta^2 + (k_2 + k_3)] [m_3\delta^2 + (k_3 + k_4)] - k_2^2 [m_1\delta^2 + (k_1 + k_2)] - k_2^2 [m_3\delta^2 + (k_3 + k_4)] x_1' = 0 \text{ (eq.M1)}$$

esta ecuación es compleja, pero acepta soluciones del tipo $x = A_0 \exp\{i\omega t\}$ que conducen a un conjunto discreto de valores ω_i correspondientes a oscilaciones puras a frecuencias determinadas que pueden darse en el sistema. Que todo el sistema oscile a una frecuencia determinada está de acuerdo con lo dicho en el apartado *La constancia de la frecuencia* de la sección 13. Estas frecuencias se denominan *modos normales de oscilación* del sistema y es fácil ver que la sustitución anterior genera una ecuación cúbica en ω^2 , de modo que el número de modos normales de oscilación de nuestro sistema es 3 como máximo. Esto sigue siendo cierto aún con fuerzas de rozamiento, ya que estas fuerzas, a parte de amortiguar el movimiento, solo introducen una modificación en las frecuencias de los modos normales del caso sin rozamiento. En el sistema de coordenadas referido a los puntos de equilibrio de las masas, la ecuación matricial correspondiente es ($x' \rightarrow x$)

$$\begin{pmatrix} m_1\delta^2 + (k_1 + k_2) & -k_2 & 0 \\ -k_2 & m_2\delta^2 + (k_2 + k_3) & -k_3 \\ 0 & -k_3 & m_3\delta^2 + (k_3 + k_4) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta^2 x_1 \\ \delta^2 x_2 \\ \delta^2 x_3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} (k_1 + k_2) & -k_2 & 0 \\ -k_2 & (k_2 + k_3) & -k_3 \\ 0 & -k_3 & (k_3 + k_4) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

El análisis de esta última ecuación diferencial matricial mediante las técnicas de los Sistemas Dinámicos permite el cálculo de los modos normales de oscilación del sistema. La forma matemática anterior indica que podemos utilizar operaciones algebraicas similares al caso del espacio vectorial euclídeo, aunque los valores x_1, x_2, x_3 son ahora medidas tomadas en la misma dimensión y para partículas diferentes. Podemos calcular la energía E del sistema haciendo el producto escalar de la ecuación matricial anterior por el vector $dr = (dx_1, dx_2, dx_3)$ e integrando

$$\int_{v_0}^v (dx_1 \quad dx_2 \quad dx_3) \bullet \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta^2 x_1 \\ \delta^2 x_2 \\ \delta^2 x_3 \end{pmatrix} = - \int_0^r (dx_1 \quad dx_2 \quad dx_3) \bullet \begin{pmatrix} (k_1 + k_2) & -k_2 & 0 \\ -k_2 & (k_2 + k_3) & -k_3 \\ 0 & -k_3 & (k_3 + k_4) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

donde los vectores r y v se definen como $r=(x_1, x_2, x_3), v=(\delta x_1, \delta x_2, \delta x_3)$. Las matrices de la expresión anterior son simétricas (iguales a su traspuesta) y por tanto las operaciones asociadas son conmutativas respecto de los vectores correspondientes, lo cual nos lleva a la siguiente propiedad para la diferencial (d)

$$M = M^T \Rightarrow \bar{a} \bullet M \bar{b} = \bar{b} \bullet M \bar{a}$$

$$d(\bar{a} \bullet M \bar{a}) = (d\bar{a}) \bullet M \bar{a} + \bar{a} \bullet M (d\bar{a}) = 2(d\bar{a}) \bullet M \bar{a}$$

con lo que la energía del sistema vale (se sobrentiende el punto del producto escalar)

$$E = \frac{1}{2} (\delta x_1 \quad \delta x_2 \quad \delta x_3) \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \\ \delta x_3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} (x_1 \quad x_2 \quad x_3) \begin{pmatrix} (k_1+k_2) & -k_2 & 0 \\ -k_2 & (k_2+k_3) & -k_3 \\ 0 & -k_3 & (k_3+k_4) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

La simetría de la matriz de constantes k permite una diagonalización, es decir, existe una base vectorial de coordenadas cartesianas ortogonales q_i girada respecto de la base vectorial de coordenadas cartesianas ortogonales x_i y compartiendo origen común; y en esta nueva base las componentes de la matriz de constantes k son nulas salvo en la diagonal. Si este giro se describe con la matriz G , cuya inversa es su traspuesta G^T , tenemos

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = G^T \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}; GG^T = G^T G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E = \frac{1}{2} (\delta q_1 \quad \delta q_2 \quad \delta q_3) G \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix} G^T \begin{pmatrix} \delta q_1 \\ \delta q_2 \\ \delta q_3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} (q_1 \quad q_2 \quad q_3) G \begin{pmatrix} (k_1+k_2) & -k_2 & 0 \\ -k_2 & (k_2+k_3) & -k_3 \\ 0 & -k_3 & (k_3+k_4) \end{pmatrix} G^T \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$$

$$E = \frac{1}{2} (\delta q_1 \quad \delta q_2 \quad \delta q_3) G \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix} G^T \begin{pmatrix} \delta q_1 \\ \delta q_2 \\ \delta q_3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} (q_1 \quad q_2 \quad q_3) \begin{pmatrix} k_1^q & 0 & 0 \\ 0 & k_2^q & 0 \\ 0 & 0 & k_3^q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$$

La matriz de masa no es necesariamente diagonal en la nueva base y denominamos a sus componentes m_{ij}^q . La *Lagrangiana*⁴ L del sistema es la diferencia entre energía cinética y potencial y las ecuaciones de Euler, válidas en cualquier sistema de coordenadas, para cada una de las coordenadas independientes q_i producen

$$L = \frac{m}{2} \sum_{(i,j)} m_{ij}^q (\delta q_i) (\delta q_j) - \frac{1}{2} (k_1^q q_1^2 + k_2^q q_2^2 + k_3^q q_3^2); \quad \frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \Rightarrow \frac{m}{2} \sum_{(j)} m_{ij}^q (\delta^2 q_j) = k_i^q q_i$$

La cosa se simplifica mucho si las masas son iguales $m=m_1=m_2=m_3$, ya que la matriz de masas es proporcional a la matriz identidad y por tanto en la nueva base la matriz continuará siendo la misma, con lo que el resultado anterior pasa a ser

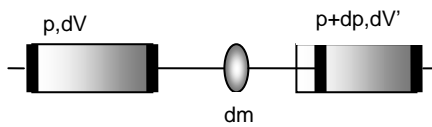
$$m \delta^2 q_i = k_i^q q_i \Rightarrow \omega_i^2 = \frac{k_i^q}{m}$$

⁴ Ver "Introducción a la Mecánica Analítica" y "Cinemática y Dinámica del Sólido Rígido" para el trabajo con matrices.

que son tres ecuaciones similares al caso de tres muelles independientes con constantes elásticas k_i^q y tres frecuencias de oscilación ω_i correspondientes a los tres modos normales de oscilación, frecuencias en las que el sistema, como un todo, puede oscilar; sin considerar influencias externas. Este caso de masas iguales conectadas por muelles es útil en modelos atómicos de moléculas y redes cristalinas.

Modelo de análisis para las ondas en gases.

El modelo de análisis de ondas para el caso de la banda elástica se puede ampliar fácilmente al caso de ondas en gases : se divide el gas en elementos de masa conectados por pistones sin masa que contienen elementos dV con gas en condiciones de presión y temperatura determinados. El movimiento del elemento dm dependerá de una diferencia de presiones entre secciones contiguas del gas. El comportamiento estático del gas está descrito en general por la ecuación de estado



del gas y en concreto por el tipo de proceso que experimente el gas. La imagen representa el caso mas sencillo con dos émbolos elementales con paredes fijas en los extremos derecho e izquierdo, de modo que las oscilaciones (ondas) posibles serán estacionarias en un caso ideal. Si el sistema es perturbado, entonces habrá una discrepancia en general en la presión de cada émbolo, y también un cambio de volumen que se puede estimar por

del gas y en concreto por el tipo de proceso que experimente el gas. La imagen representa el caso mas sencillo con dos émbolos elementales con paredes fijas en los extremos derecho e izquierdo, de modo que las oscilaciones (ondas) posibles serán estacionarias en un caso ideal. Si el sistema es perturbado, entonces habrá una discrepancia en general en la presión de cada émbolo, y también un cambio de volumen que se puede estimar por

$$dV = dSdx$$

$$dV' = dV - dSd\xi \Rightarrow d^2V = -dSd^2\xi$$

donde la variable x (dx) hace referencia a la distribución de gas con los émbolos en reposo, dS es la superficie de cada émbolo, $d\xi$ es la modificación de longitud de cada émbolo, dV es el volumen inicial de los émbolos y d^2V el cambio en volumen en un instante dado en situación dinámica entre dos émbolos elementales contiguos. Por otro lado, la presión p no balanceada genera una fuerza sobre el elemento de masa dm de valor (2ª ley de newton)

$$d^2F = dSdp = dm \frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial t^2} = \rho dV \frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial t^2}$$

Podemos hacer los cálculos para un proceso Isotermo y uno adiabático derivando sus funciones de estado para pequeñas variaciones respecto del estado de equilibrio (p, dV) , de modo que $dx \gg d\xi$:

1 – Isotermo : $p dV = cte \rightarrow dp dV + p d^2V = 0 \rightarrow dS dp dV + p dS d^2V = 0 \rightarrow$

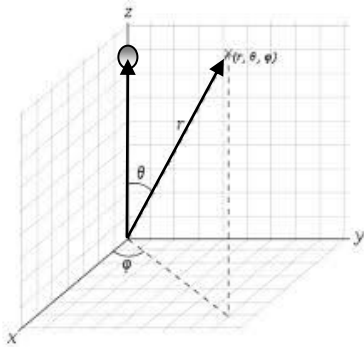
$$\frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial t^2} = \frac{p}{\rho} \frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial x^2} \Rightarrow c_i = \sqrt{\frac{p}{\rho}}$$

2 – Adiabático : $p(dV)^\gamma = cte \rightarrow dp(dV)^\gamma + \gamma p(dV)^{\gamma-1} d^2V \rightarrow dS dp dV + \gamma p dS d^2V = 0 \rightarrow$

$$\frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial t^2} = \gamma \frac{p}{\rho} \frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial x^2} \Rightarrow c_a = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}}$$

donde γ es el coeficiente adiabático y p, ρ son los valores de presión y densidad del gas no perturbado en el punto de equilibrio termodinámico en el que se ha hecho el análisis. El contraste experimental a través de la medida de la velocidad de sonido indica que la velocidad está más próxima a c_a y por tanto es un fenómeno de tipo adiabático. *Note el lector que la velocidad de las ondas mecánicas se calcula a partir de valores propios del equilibrio del sistema.* En este caso los parámetros son la presión, la densidad de un gas en equilibrio; y el cociente entre calores específicos a volumen y a presión constante, parámetros propios del *equilibrio termodinámico*. Esto nos dice que las ondas mecánicas están asociadas a modificaciones relativamente pequeñas respecto a las condiciones de equilibrio de un *sistema estable*; es decir, un sistema que tiende a recuperar su estado inicial de equilibrio en respuesta a perturbaciones.

Separación de variables de la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas y simetría axial.



Imaginemos una carga puntual localizada en z_0 en nuestro sistema de coordenadas. Tomemos $f(r, \theta) = \frac{1}{|r - z_0|}$ como la función de Green del Laplaciano. Evidentemente es una solución de la ecuación de Laplace y se puede apreciar en el dibujo que dicha función es simétrica respecto de ángulo ϕ , es decir, supuesto z_0 fijo, es una función $f(r, \theta)$. Podemos ver

explícitamente la dependencia de la función así

$$f(r, \theta) = \frac{1}{|r - z_0|} = \frac{1}{\sqrt{(r - z_0) \cdot (r - z_0)}} = (r^2 + z_0^2 - 2z_0r \cos(\theta))^{-1/2} = \frac{1}{r} \left(1 + \left(\frac{z_0}{r}\right)^2 - 2\frac{z_0}{r} \cos(\theta) \right)^{-1/2}$$

esta función debe cumplir la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas que, como vimos en el trabajo sobre mecánica de fluidos, es

$$\frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right] \right) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin(\theta) \frac{\partial f}{\partial \theta} \right] \right) = 0$$

donde la simetría que manejamos nos permite eliminar el término correspondiente a la variable ϕ . Recordando la importancia de las series infinitas en la solución de este tipo de ecuaciones diferenciales, podemos expresar la función $f(r, \theta)$ de esta forma bajo ciertas condiciones. Si r es suficientemente mayor que z_0 de modo que se cumpla

$$0 < \left(\frac{z_0}{r}\right)^2 - 2\frac{z_0}{r} \cos(\theta) < 1$$

Entonces $f(r, \theta)$ se puede expresar *exactamente* como una serie infinita de Taylor de la forma

$$f(r, \theta) = \frac{1}{r} (1+x)^{-1/2} = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 \dots \right); \quad x = \left(\frac{z_0}{r}\right)^2 - 2\frac{z_0}{r} \cos(\theta)$$

debido al carácter polinómico, es evidente que podemos expresar la serie infinita anterior de esta forma

$$\frac{1}{|r-z_0|} = \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\theta) \left(\frac{z_0}{r}\right)^l = \sum_{l=0}^{\infty} z_0^l P_l(\theta) r^{-(l+1)} ; z_0 \ll r$$

donde P_l se define como el factor asociado a la potencia l de z_0/r y es un polinomio en $\cos(\theta)$. Este grupo P_l se conoce en matemáticas como *polinomios de Legendre*. Note el lector que hemos puesto $f(r, \theta)$ como una suma de funciones separadas en sus variables. Si aplicamos el operador de Laplace la serie infinita anterior tenemos para la parte radial

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\sum_{l=0}^{\infty} z_0^l P_l(\theta) r^{-(l+1)} \right) \right] = \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \left(\sum_{l=0}^{\infty} -(l+1) z_0^l P_l(\theta) r^{-(l+2)} \right) \right] = \frac{\partial}{\partial r} \left[\left(\sum_{l=0}^{\infty} -(l+1) z_0^l P_l(\theta) r^{-l} \right) \right] = \left(\sum_{l=0}^{\infty} l(l+1) z_0^l P_l(\theta) r^{-(l+1)} \right)$$

y para la parte angular

$$\frac{1}{\sin(\theta)} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sum_{l=0}^{\infty} z_0^l P_l(\theta) r^{-(l+1)} \right) \right] \right) = \sum_{l=0}^{\infty} z_0^l \left[\frac{1}{\sin(\theta)} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin(\theta) \frac{\partial P_l(\theta)}{\partial \theta} \right] \right) \right] r^{-(l+1)}$$

y sumando ambas partes

$$\sum_{l=0}^{\infty} l(l+1) z_0^l P_l(\theta) r^{-(l+1)} + \sum_{l=0}^{\infty} z_0^l \left[\frac{1}{\sin(\theta)} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin(\theta) \frac{\partial P_l(\theta)}{\partial \theta} \right] \right) \right] r^{-(l+1)} = 0 = \sum_{l=0}^{\infty} z_0^l \left[l(l+1) P_l(\theta) + \frac{1}{\sin(\theta)} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin(\theta) \frac{\partial P_l(\theta)}{\partial \theta} \right] \right) \right] r^{-(l+1)}$$

dado que esta expresión debe anularse para cualesquiera valores de z_0 y r , dentro del dominio de valores antes señalados, es evidente que debe cumplirse, para cualquier valor del índice l

$$l(l+1) P_l(\theta) + \frac{1}{\sin(\theta)} \left(\frac{d}{d\theta} \left[\sin(\theta) \frac{dP_l(\theta)}{d\theta} \right] \right) = 0$$

La ecuación diferencial anterior debe verificarse para los polinomios de Legendre y esta ecuación diferencial resulta ser formalmente igual a la parte angular de la correspondiente separación de variables en coordenadas esféricas

$$g(r, \theta) = R(r)\Phi(\theta)$$

$$\frac{1}{R} \left(\frac{d}{dr} \left[r^2 \frac{dR}{dr} \right] \right) = cte = - \frac{1}{\Phi \sin(\theta)} \left(\frac{d}{d\theta} \left[\sin(\theta) \frac{d\Phi}{d\theta} \right] \right)$$

donde la constante corresponde al valor $l(l+1)$, de modo que la parte radial debe cumplir

$$\left(\frac{d}{dr} \left[r^2 \frac{dR}{dr} \right] \right) = l(l+1)R$$

guiados por la forma de la serie infinita de Taylor que tomamos inicialmente $f(r, \theta)$ buscamos soluciones de la ecuación anterior en forma de *polinomios en r*. Dada la linealidad de la ecuación podemos ver que las soluciones polinómicas son

$$R_l = A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}$$

de modo que la separación de variables unida a la linealidad del operador de Laplace permite expresar una solución al problema en forma de serie infinita

$$\sum_{l=0}^{\infty} R_l(r) P_l(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}) P_l(\theta)$$

en el que vemos una solución compatible con la función $f(r, \theta)$ para el caso $A_l=0$

Fórmula recursiva para los polinomios de Legendre

Según la sección anterior tenemos para los polinomios de Legendre

$$(r^2 + R^2 - 2Rrx)^{-1/2} = \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x) \left(\frac{R}{r}\right)^l ; \quad x = \cos(\theta)$$

derivando respecto de la variable R tenemos

$$-\frac{2R-2rx}{2} (r^2 + R^2 - 2Rrx)^{-3/2} = \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{l}{R} P_l(x) \left(\frac{R}{r}\right)^l \Rightarrow (rx - R) (r^2 + R^2 - 2Rrx)^{-1/2} = (r^2 + R^2 - 2Rrx) \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{l}{R} P_l(x) \left(\frac{R}{r}\right)^l$$

$$(rx - R) \sum_{l=0}^{\infty} r^{-l} P_l(x) R^l = (r^2 + R^2 - 2Rrx) \sum_{l=0}^{\infty} l r^{-l} P_l(x) R^{l-1}$$

debemos ahora igualar los términos correspondientes a la misma potencia de R , lo que nos dará la fórmula recursiva para los polinomios de Legendre

$$xr^{-l+1} P_l(x) R^l - r^{-l} P_l(x) R^{l+1} = lr^{-l+2} P_l(x) R^{l-1} + lr^{-l} P_l(x) R^{l+1} - 2xlr^{-l+1} P_l(x) R^l$$

potencia $R \ l+1 \rightarrow l$ y potencia $R \ l-1 \rightarrow l \Rightarrow$

$$xr^{-l+1} P_l(x) R^l - r^{-l+1} P_{l-1}(x) R^l = (l+1)r^{-l+1} P_{l+1}(x) R^l + (l-1)r^{-l+1} P_{l-1}(x) R^l - 2xlr^{-l+1} P_l(x) R^l$$

$$(l+1)P_{l+1}(x) = (2l+1)xP_l(x) - lP_{l-1}(x) ; \quad P_0(x) = 1, P_1(x) = x$$

Generalización de la fórmula para la difracción de Fraunhofer.

Se ha desarrollado la difracción en el caso de que el foco y el observador están en el plano perpendicular a la rendija de difracción y muy alejados de ella. En un caso mas general el foco y el observador no están en este plano y esto supone que, en la imagen que hemos utilizado, la puerta asociada a las ondas planas incidente y refractada está “desquiciada”. Podemos considerar que ahora se trata de un plano que puede girar arbitrariamente no respecto de un eje como antes, sino solo respecto de un punto fijo. Este punto fijo podemos tomarlo como origen del sistema de coordenadas de la placa (x,y,z) , con z perpendicular a la placa. Los valores R_0, d_0 se refieren ahora al origen de coordenadas y para calcular los términos de desfase debemos utilizar algo de álgebra básica. Si, en el sistema de coordenadas de la placa, r_0 representa un punto en el plano de onda y $r = (x,y,0)$ es la proyección de r_0 en el plano de la placa según la dirección del vector director unitario del plano u_0 entonces se verifica para la distancia δ correspondiente

$$\delta = (\vec{r} - \vec{r}_o) \cdot \vec{u}_o = \vec{r} \cdot \vec{u}_o$$

ya que en el sistema de coordenadas de la placa la ecuación del plano verifica

$$\vec{r}_o \cdot \vec{u}_o = 0$$

para el desfase completo tenemos en nuestro caso

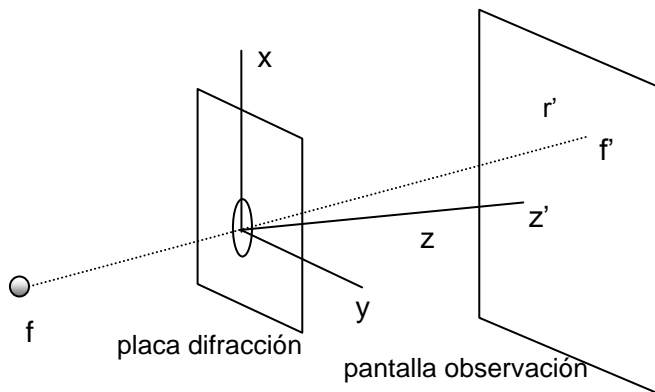
$$\delta = \delta_d + \delta_R = \vec{r} \cdot (\vec{u}_d - \vec{u}_R)$$

donde el vector u_d apunta hacia la placa y el vector u_R apunta hacia el observador. Podemos generalizar la expresión dada para la difracción de esta forma

$$\phi_c(\vec{r}') = -ik \frac{A}{4\pi} \frac{e^{ik(R_0+d_0)}}{R_0 d_0} [\cos(\theta_d) + \cos(\theta_R)] \int_{placa} \rho(x, y) \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{r}) dx dy ; k(\vec{u}_d - \vec{u}_R) = -\vec{k}$$

donde $\rho(x,y)$ es la *función rendija* que vale 1 para los puntos de la rendija y 0 para el resto. Para un foco muy alejado será u_d constante y u_R varía según la posición angular del observador. Vemos claramente que la integral sobre la placa está directamente relacionada con la transformada de Fourier, en dos dimensiones, de la función rendija $\rho(x,y)$.

Difracción de Fresnel



El dibujo muestra un foco de luz (ondas) muy alejado cuyas ondas inciden en una placa de difracción tras la que hay una pantalla plana de observación paralela respecto a la placa y a una distancia z' . El dibujo representa en trazo punteado un rayo que atraviesa la rendija y llega a la pantalla de observación en el punto f' . En un entorno relativamente cercano a f'

aparecerán las bandas de interferencia asociadas a la difracción. El punto $r'(x',y',z')$ corresponde a un punto arbitrario en la pantalla de observación; mientras que $r(x,y,0)$ corresponde a un punto arbitrario en la rendija de la placa y R es el vector diferencia entre r y r' . En estas condiciones la integral de difracción se puede aproximar por

$$\phi_c(\vec{r}') = -ik \frac{A}{4\pi} \frac{e^{ikd_0}}{d_0} [\cos(\theta_d) + \langle \cos(\theta_R) \rangle] \int \exp(i\vec{k} \cdot \vec{u}_d) \frac{\exp(i\vec{k} \cdot \vec{R})}{R} dS_1$$

donde la onda procedente de f llega aproximadamente como una onda plana a la rendija, por lo que los términos asociados se pueden aproximar de la misma forma que en el caso anterior de Fraunhofer. La diferencia es que ahora suponemos que la

pantalla de observación no está en el infinito. Esto hace que el ángulo θ_R varíe algo en cada punto de la rendija, por lo que introducimos el valor medio $\langle \cos(\theta_R) \rangle$. También podemos aproximar el valor R , según el teorema de Pitágoras, como

$$l_p^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2$$

$$R = \sqrt{l_p^2 + (z')^2} = |z'| \sqrt{1 + \left(\frac{l_p}{z'}\right)^2}; R \approx |z'| + \frac{l_p^2}{2|z'|} + \dots$$

en tanto que esta aproximación sea aplicable ($l \ll |z'|$), obtenemos para la integral de difracción correspondiente a la aproximación de Fresnel

$$\phi_c(\bar{r}') = -ik \frac{A}{4\pi} \frac{e^{ik(d_0 + |z'|)}}{d_0 \langle R \rangle} [\cos(\theta_d) + \langle \cos(\theta_R) \rangle] \int_{placa} \rho(x, y) \exp(ik\bar{r} \cdot \bar{u}_d) \exp\left(ik \frac{l_p^2}{2|z'|}\right) dx dy$$

donde $\rho(x, y)$ es la *función rendija* que vale 1 para los puntos de la rendija y 0 para el resto; con el mismo margen de aproximación el valor medio $\langle R \rangle$ se puede sustituir por $|z'|$.

En este punto, debemos observar la simetría que presentan los parámetros d y R . Hemos desarrollado la teoría para $d \rightarrow \infty$ y R cercano a la placa, pero de la simetría de la integral de difracción podemos ver que un análisis para $R \rightarrow \infty$ y d cercano a la placa proporciona un resultado similar

$$\phi_c(\bar{r}') = -ik \frac{A}{4\pi} \frac{e^{ik(R_0 + |z_f|)}}{\langle d \rangle R_0} [\langle \cos(\theta_d) \rangle + \cos(\theta_R)] \int_{placa} \rho(x, y) \exp(-ik\bar{r} \cdot \bar{u}_R) \exp\left(ik \frac{l_f^2}{2|z_f|}\right) dx dy$$

$$l_f^2 = (x - x_f)^2 + (y - y_f)^2$$

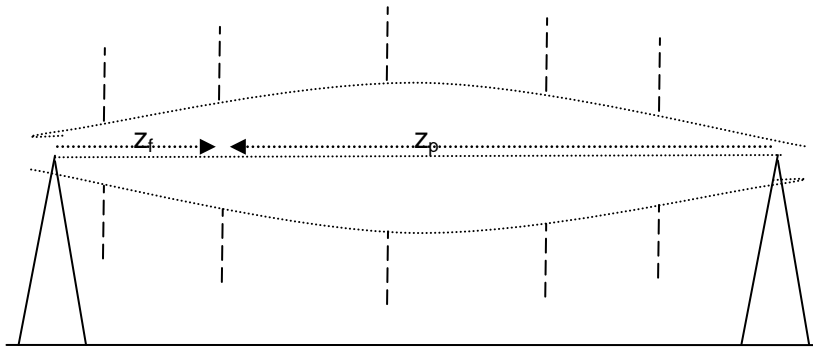
donde el subíndice f hace referencia al foco. Para el caso de incidencia normal sobre la placa la línea punteada del dibujo coincide con el eje z y las integrales sobre la placa son similares en los dos casos ($z' = z_p$)

$$\int_{\substack{placa \\ d \rightarrow \infty}} \rho(x, y) \exp\left(ik \frac{l_p^2}{2|z_p|}\right) dx dy; \int_{\substack{placa \\ R \rightarrow \infty}} \rho(x, y) \exp\left(ik \frac{l_f^2}{2|z_f|}\right) dx dy$$

Zonas de Fresnel y Telecomunicaciones.

Anteriormente hemos tratado las aproximaciones a la difracción de Fresnel en que el foco o el receptor se sitúan en el infinito. Queda por ver el caso en que ni el foco ni el receptor están a distancia infinita. Podemos ver fácilmente que en este caso la integral de placa es de la forma

$$\int_{placa} \rho(x, y) \exp\left(ik \left[\frac{l_p^2}{2|z_p|} + \frac{l_f^2}{2|z_f|} \right]\right) dx dy$$



Imaginemos dos antenas de telecomunicaciones, una emisora y otra receptora como se muestra en el dibujo. Las líneas segmentadas verticales representan posiciones de posibles placas de difracción. Dada la geometría utilizada, tenemos $l_p=l_r=r$. Tomando

$z=|z_p|$ y D la distancia entre antenas la integral de placa queda

$$\int_{placa} \rho(x, y) \exp\left(ik \frac{r^2 D}{2z(D-z)}\right) dx dy$$

el cálculo de esta integral se hace normalmente utilizando métodos numéricos basados en las *zonas de Fresnel*. Las zonas de Fresnel son anillos circulares sobre la superficie de integración de la rendija (z constante) definidos según la expresión

$$(n-1)\pi \leq k \frac{r^2 D}{2z(D-z)} \leq n\pi ; n=1,2,3...$$

la propiedad principal de las zonas de Fresnel es que entre dos zonas contiguas las fases promedio de la onda son opuestas y por tanto provocan una interferencia con componente destructiva en el resultado final. Resulta que la mayor contribución a la intensidad de la onda percibida desde el receptor procede de la primera zona de Fresnel ($n=1$) y por tanto es importante que en los sistemas de telecomunicaciones no aparezcan obstáculos (edificios, árboles, montañas...) que invadan la primera zona de Fresnel. En largas distancias es necesario incluso considerar la curvatura de la tierra. El tamaño de esta zona se mide con el parámetro $r=r_1$ y vemos que varía con la posición (z) de la placa de difracción según la relación (λ longitud de onda)

$$r_1^2 D = z(D-z)\lambda$$

con el cambio $z=z_1+D/2$ tenemos

$$r_1^2 D + z_1^2 \lambda = \frac{D^2}{4} \lambda$$

que es la ecuación, en sus coordenadas canónicas, de un elipsoide de revolución representado en línea punteada en el dibujo anterior. Para ponderar la importancia de las zonas de Fresnel en las telecomunicaciones recordemos que el rango de longitudes de onda para las ondas de radio va de décimas de milímetro hasta cerca de 100 kilómetros.

Recordando la integral de placa al principio de esta sección podemos desarrollar \hat{f}_p^2 de esta forma

$$\frac{l_p^2}{2|z_p|} = \frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{2|z_p|} = \frac{x^2 + y^2}{2|z_p|} + \frac{x'^2 + y'^2}{2|z_p|} - \frac{xx' + yy'}{|z_p|}$$

Si ahora hacemos tender $z' \rightarrow \infty$, pero de modo que las proporciones x'/z' , y'/z' (es decir los ángulos de observación) permanezcan constantes. El primer sumando del resultado se va haciendo tan pequeño como queramos, ya que el numerador depende de las dimensiones de la rendija. La integral de placa varía en las coordenadas no primadas (x,y) y por tanto el segundo sumando es una constante en la integral de placa; con lo que se puede sacar de la integral. Solo queda el último sumando, que corresponde al término de fase de la difracción de Fraunhofer

$$\frac{xx' + yy'}{|z_p|} = \left(\frac{x'}{|z_p|}, \frac{y'}{|z_p|} \right) \cdot (x, y) = \bar{u}_R \cdot \bar{r}$$

de esta forma la difracción de Fresnel se convierte en la de Fraunhofer para foco y observador a larga distancia.

La serie de Fourier

La serie de Fourier aproxima una función $\xi(x)$ en un intervalo de $[0 \leq x \leq P]$ utilizando funciones seno/coseno con periodo P/n , $n=1,2,3,4\dots$ según la definición

$$\xi(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \sin(k_n x) + b_n \cos(k_n x)]; \quad k_n = \frac{2n\pi}{P}$$

Veremos que el término a_0 y los factores a_n , b_n están totalmente determinados partiendo de la definición anterior. Multiplicando la definición por $\sin(k_m x)$ y $\cos(k_m x)$ e integrando en el intervalo $[0, P]$ tenemos

$$\int_0^P \xi(x) \sin(k_m x) dx = a_0 \int_0^P \sin(k_m x) dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \int_0^P \sin(k_n x) \sin(k_m x) dx + b_n \int_0^P \cos(k_n x) \sin(k_m x) dx \right]$$

$$\int_0^P \xi(x) \cos(k_m x) dx = a_0 \int_0^P \cos(k_m x) dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \int_0^P \sin(k_n x) \cos(k_m x) dx + b_n \int_0^P \cos(k_n x) \cos(k_m x) dx \right]$$

Recordando las propiedades de la exponencial compleja obtenemos las siguientes relaciones trigonométricas

$$\cos(k_{m+n} x) + i \sin(k_{m+n} x) = \exp(ik_{m+n} x) = \exp(ik_m x) \exp(ik_n x) \Rightarrow$$

$$\sin(k_{m+n} x) = \cos(k_m x) \sin(k_n x) + \cos(k_n x) \sin(k_m x)$$

$$\cos(k_{m+n} x) = \cos(k_m x) \cos(k_n x) - \sin(k_n x) \sin(k_m x)$$

La integral de las igualdades anteriores en el intervalo $[0, P]$ es también nula, debido a la "simetría diferida" de las funciones seno y coseno respecto del eje de abscisas ($y=0$)

$$0 = \int_0^P \sin(k_{m+n}x) dx = \int_0^P \cos(k_m x) \sin(k_n x) dx + \int_0^P \cos(k_n x) \sin(k_m x) dx$$

$$0 = \int_0^P \cos(k_{m+n}x) dx = \int_0^P \cos(k_m x) \cos(k_n x) dx - \int_0^P \sin(k_n x) \sin(k_m x) dx$$

Si hacemos las siguientes integrales por partes

$$\int_0^P \cos(k_m x) \sin(k_n x) dx = -\frac{1}{k_n} \cos(k_m x) \cos(k_n x) \Big|_0^P - \frac{k_m}{k_n} \int_0^P \sin(k_m x) \cos(k_n x) dx$$

$$\int_0^P \cos(k_m x) \cos(k_n x) dx = \frac{1}{k_n} \cos(k_m x) \sin(k_n x) \Big|_0^P + \frac{k_m}{k_n} \int_0^P \sin(k_m x) \sin(k_n x) dx$$

vemos que los primeros términos del segundo miembro se anulan y sustituyendo el resultado en las fórmulas previas

$$0 = \left(1 - \frac{k_m}{k_n}\right) \int_0^P \cos(k_n x) \sin(k_m x) dx \Rightarrow \int_0^P \cos(k_n x) \sin(k_m x) dx = 0 \quad \forall m, n$$

$$0 = \left(\frac{k_m}{k_n} - 1\right) \int_0^P \sin(k_n x) \sin(k_m x) dx \Rightarrow \int_0^P \sin(k_n x) \sin(k_m x) dx = 0 \quad \forall m \neq n$$

en rigor la primera fórmula es para $m \neq n$, pero el lector puede verificar fácilmente que también es válida para $m = n$. Con estos resultados retomamos las primeras integrales que planteamos para determinar los factores de la serie de Fourier de modo que tenemos

$$\int_0^P \xi(x) \sin(k_m x) dx = a_0 \int_0^P \sin(k_m x) dx + a_m \int_0^P \sin(k_m x) \sin(k_m x) dx$$

$$\int_0^P \xi(x) \cos(k_m x) dx = a_0 \int_0^P \cos(k_m x) dx + b_m \int_0^P \cos(k_m x) \cos(k_m x) dx$$

un cálculo directo de las integrales da

$$\int_0^P \sin(k_m x) \sin(k_m x) dx ; k_m x = u \Rightarrow \frac{1}{k_m} \int_0^{2m\pi} \sin^2(u) du = \frac{2m\pi}{2k_m} = \frac{P}{2} ; \forall m \neq 0$$

$$m = 0 \Rightarrow a_0 \int_0^P dx = a_0 P$$

el caso de producto de cosenos resulta en el mismo valor de la integral, de modo que las constantes de la serie de Fourier quedan determinadas por las fórmulas

$$a_0 = \frac{1}{P} \int_0^P \xi(x) dx ; a_n = \frac{2}{P} \int_0^P \xi(x) \sin(k_n x) dx ; b_n = \frac{2}{P} \int_0^P \xi(x) \cos(k_n x) dx ; k_n = \frac{2n\pi}{P}$$

También se pueden calcular estas constantes utilizando la exponencial compleja, lo que puede simplificar el cálculo de las integrales.

$$b_n - ia_n = \frac{2}{P} \int_0^P \xi(x) (\cos(k_n x) - i \sin(k_n x)) dx = \frac{2}{P} \int_0^P \xi(x) \exp(-ik_n x) dx \quad (\text{coeficientes})$$

de modo que haciendo una sola integral se pueden calcular los dos coeficientes. Pero la introducción de la exponencial compleja tiene un calado mas profundo que podemos introducir en este desarrollo

$$(b_n - ia_n)\exp(ik_n x) = b_n \cos(k_n x) + a_n \sin(k_n x) + i(b_n \sin(k_n x) - a_n \cos(k_n x))$$

Si hacemos un sumatorio para n en $[-\infty, +\infty]$ y teniendo en cuenta que $a_{-n} = -a_n$ y $b_{-n} = b_n$

$$\begin{aligned} \sum_{-\infty}^{\infty} (b_n - ia_n)\exp(ik_n x) &= \sum_{-\infty}^{\infty} (b_n \cos(k_n x) + a_n \sin(k_n x)) + i \sum_{-\infty}^{\infty} (b_n \sin(k_n x) - a_n \cos(k_n x)) \\ &= b_0 + 2 \sum_1^{\infty} (b_n \cos(k_n x) + a_n \sin(k_n x)) \Rightarrow \\ \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{(b_n - ia_n)}{2} \exp(ik_n x) &= \frac{b_0}{2} + \sum_1^{\infty} (b_n \cos(k_n x) + a_n \sin(k_n x)) = \xi(x) \end{aligned}$$

donde $b_0/2 = a_0$, es decir, el valor medio de $\xi(x)$; según la fórmula de los coeficientes. Si en los resultados hacemos el cambio $x \rightarrow x - P/2$, podemos resumir el resultado con estas expresiones

$$\begin{aligned} b_n - ia_n &= \frac{2}{P} \int_{-P/2}^{P/2} \xi(x) \exp(-ik_n x) dx \\ \xi(x) &= \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{(b_n - ia_n)}{2} \exp(ik_n x) \end{aligned}$$

La transformada de Fourier

El resultado anterior permite una extensión para el caso de una función arbitraria $\xi(x)$ que no sea periódica pero con propiedades adecuadas en cuanto a sus integrales. Para esta extensión basta considerar que el periodo P tiende a infinito. En estas condiciones tenemos, introduciendo un factor $1/\sqrt{2\pi}$ por conveniencia

$$\begin{aligned} \lim_{P \rightarrow \infty} \frac{b_n - ia_n}{2\sqrt{2\pi}} P &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \xi(x) \exp(-ik_n x) dx \\ \Delta k_n &= \frac{2\pi}{P} \Delta n ; \Delta n = 1 \Rightarrow \frac{\Delta k_n}{2\pi/P} = 1 \Rightarrow \\ \xi(x) &= \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{b_n - ia_n}{2} \exp(ik_n x) \left\{ \frac{\Delta k_n}{2\pi/P} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{b_n - ia_n}{2\sqrt{2\pi}} P \exp(ik_n x) \Delta k_n \end{aligned}$$

El último sumatorio corresponde a una *suma de Riemman* de la integral correspondiente, que en el límite $P \rightarrow \infty$ produce

$$\begin{aligned} \hat{\xi}(k) &= \lim_{P \rightarrow \infty} \frac{b_n - ia_n}{2\sqrt{2\pi}} P = \lim_{\Delta k_n \rightarrow 0} \frac{\Delta C(k_n)}{\Delta k_n} ; \Delta C(k_n) = \frac{b_n - ia_n}{2\sqrt{2\pi}} \\ \hat{\xi}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \xi(x) \exp(-ikx) dx ; \xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\xi}(k) \exp(ikx) dk \end{aligned}$$

que son las relaciones correspondientes a la *transformada de Fourier*. Para que exista la transformada de Fourier de una función $\xi(x)$ esta debe decrecer hacia cero con suficiente rapidez cuando x se mueve hacia $\pm\infty$; por ejemplo no existe la transformada de Fourier de funciones polinómicas.

La serie de Fourier y la delta de Dirac.

La delta de Dirac para una variable real⁵ x se define como una función generalizada con las siguientes propiedades

$$\left. \begin{aligned} \delta(x) &= 0 \ ; \ x \neq 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx &= 1 \end{aligned} \right\}$$

Podemos imaginar una función periódica que sea repetición de la delta de Dirac en un intervalo $[-P/2, P/2]$. La función generalizada correspondiente es

$$\left. \begin{aligned} \delta_p(x) &= 0 \ ; \ x \neq nP \ , \ n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \\ \int_{nP/2}^{(n+2)P/2} \delta_p(x) dx &= 1 \end{aligned} \right\}$$

La serie de Fourier correspondiente a δ_p será

$$a_0 = \frac{1}{P} \int_{-P/2}^{P/2} \delta_p(x) dx = \frac{1}{P}; \ a_n = \frac{2}{P} \int_{-P/2}^{P/2} \delta_p(x) \sin(k_n x) dx = 0; \ b_n = \frac{2}{P} \int_{-P/2}^{P/2} \delta_p(x) \cos(k_n x) dx = \frac{2}{P}; \ k_n = \frac{2n\pi}{P}$$

$$\delta_p(x) = \frac{2}{P} \left(\frac{1}{2} + \sum_1^{\infty} \cos(k_n x) \right)$$

si expresamos la serie de Fourier de una función ξ arbitraria substituyendo el valor de los coeficientes por su definición tenemos

$$\begin{aligned} \xi(x) &= \frac{1}{P} \int_{-P/2}^{P/2} \xi(u) du + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{P} \int_{-P/2}^{P/2} \xi(u) \sin(k_n u) \sin(k_n x) du + \frac{2}{P} \int_{-P/2}^{P/2} \xi(u) \cos(k_n u) \cos(k_n x) du \right] \\ \xi(x) &= \frac{2}{P} \int_{-P/2}^{P/2} du \xi(u) \left(\frac{1}{2} + \sum_1^{\infty} \sin(k_n u) \sin(k_n x) + \cos(k_n u) \cos(k_n x) \right) = \\ &= \frac{2}{P} \int_{-P/2}^{P/2} du \xi(u) \left(\frac{1}{2} + \sum_1^{\infty} \cos(k_n (u-x)) \right) = \int_{-P/2}^{P/2} du \xi(u) \delta_p(u-x) = \xi(x) \end{aligned}$$

de esta forma, si la serie de Fourier definida para δ_p es válida, entonces se demuestra que la serie de Fourier de cualquier función ξ converge al valor esperado en cada punto $\xi(x)$. Sin embargo existen mas *teoremas de convergencia de la serie de Fourier* que resultarán interesantes para el lector.

⁵ Para varias variables independientes se define $\delta(x,y,z,\dots) = \delta(x) \delta(y) \delta(z) \dots$

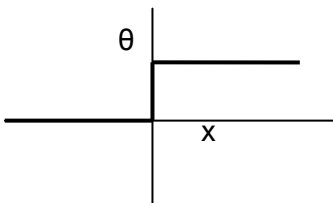
En el límite en que el periodo tiende a infinito tenemos la transformada de Fourier de la función generalizada delta de Dirac. La transformada inversa de Fourier proporciona una expresión alternativa de la delta de Dirac.

$$\hat{\delta}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \exp(-ikx) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} ; \delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ikx) dk$$

a partir de este resultado se puede demostrar fácilmente las siguientes relaciones

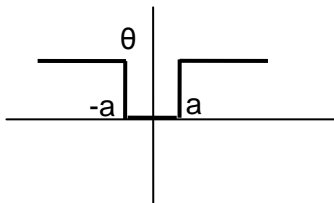
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x) dx = f(0) \Rightarrow f(x) \delta(x) = f(0) \delta(x)$$

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x)$$



A partir de la delta de Dirac se pueden definir el *escalón de Heaviside* $\theta(x)$, una función generalizada que tiene la ventaja de la visualización en un diagrama cartesiano; lo que permite introducir nuevos planteamientos.

$$\theta(x) = \int_{-\infty}^x \delta(u) du = \begin{cases} 0 & ; x < 0 \\ 1 & ; x > 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{d\theta(x)}{dx} = \delta(x)$$

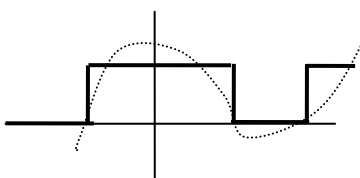


Podemos visualizar fácilmente la función generalizada $\theta(x^2 - a^2)$ en la imagen adjunta; de la representación gráfica podemos ver la identidad $\theta(x^2 - a^2) = 1 - \theta(x+a) + \theta(x-a)$ ($a > 0$), y derivándola tenemos

$$\frac{d}{dx} \theta(x^2 - a^2) = 2x \delta(x^2 - a^2) = -\delta(x+a) + \delta(x-a) \Rightarrow \delta(x^2 - a^2) = -\frac{1}{2x} \delta(x+a) + \frac{1}{2x} \delta(x-a)$$

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2a} (\delta(x+a) + \delta(x-a)); \quad a > 0$$

Podemos generalizar fácilmente el resultado anterior para una función $f(x)$ arbitraria que sea argumento del escalón de Heaviside. La función



$f(x)$ se representa con puntos en el dibujo adjunto y sus ceros son x_0^i ; de modo que tenemos $\theta(f(x)) = \theta(x - x_0^1) - \theta(x - x_0^2) + \dots - \dots$

$$\frac{d}{dx} \theta(f(x)) = \frac{df}{dx} \delta(f(x)) = \delta(x - x_0^1) - \delta(x - x_0^2) + \dots \Rightarrow \delta(f(x)) = \frac{1}{df/dx} (\delta(x - x_0^1) - \delta(x - x_0^2) + \dots) \Rightarrow$$

$$\delta(f(x)) = \sum_i \frac{\delta(x - x_0^i)}{|df/dx|_{x_0^i}}$$

el módulo de la derivada aparece debido al carácter creciente (derivada positiva) o decreciente (derivada negativa) de la función en los sucesivos ceros de la función.

Si $f(x)$ es una función *derivable* podemos plantear la siguiente integral de $\theta(x)f'(x)$ y resolverla por partes

$$\int_{-\infty}^a \theta(x) \frac{df}{dx} dx = \theta(x)f(x) \Big|_{-\infty}^a - \int_{-\infty}^a f(x)\delta(x)dx \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a > 0 ; f(a) - f(0) = f(a) - \int_{-\infty}^a f(x)\delta(x)dx \\ a < 0 ; 0 = 0 - \int_{-\infty}^a f(x)\delta(x)dx \end{array} \right\}$$

y por tanto obtenemos de nuevo

$$\boxed{f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx \Rightarrow f(x)\delta(x) = f(0)\delta(x)}$$

Análogamente al caso anterior Si $f(x)$ es una función *derivable* podemos plantear la siguiente integral de $\delta(x)f(x)$ y resolverla por partes, lo que nos lleva a la función generalizada correspondiente a la derivada de la delta de Dirac $d\delta/dx$

$$\int_{-\infty}^x \delta(u) \frac{df(u)}{du} du + \int_{-\infty}^x \frac{d\delta(u)}{du} f(u) du = \delta(u)f(u) \Big|_{-\infty}^x \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{d\delta(x)}{dx} f(x) = 0 ; x \neq 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\delta(x)}{dx} f(x) = -f'(0) ; x = 0 \end{array} \right\}$$

$$\boxed{\frac{d\delta}{dx} f(x) = -\frac{df}{dx} \delta(x)}$$

Los potenciales retardados de una carga puntual

Supongamos que tenemos una carga puntual Q en reposo en nuestro origen de coordenadas y a una distancia D del origen un observador mantiene una carga menor q en reposo aplicándole la fuerza correspondiente para equilibrar la interacción coulombiana. El sistema se mantiene sin cambios, pero en el instante $t=t_r$ se mueve bruscamente la carga Q . ¿Qué efectos tiene esta acción según el observador? Según el electromagnetismo la acción supone una modificación del campo de la carga Q y esta modificación del campo sigue la ecuación de ondas para una onda que se propaga, en el vacío, a la velocidad de la luz c ; así para los campos eléctrico y magnético en el exterior de la carga Q se verifica la ecuación de ondas

$$\nabla^2 \bar{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} ; \nabla^2 \bar{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{B}}{\partial t^2}$$

Siguiendo el *principio de Huygens*, el observador percibirá las consecuencias de la modificación del campo solo cuando la primera onda esférica, partiendo del origen de coordenadas en $t=t_r$, cubra la distancia D al observador; es decir, el observador percibirá cambios en un tiempo posterior $t_o = t_r + D/c$.

La técnica de los potenciales retardados permite calcular los potenciales eléctrico (V) y magnético (A) modificados por efecto de la propagación ondulatoria del campo

electromagnético. Para el caso del potencial eléctrico V , en un caso *estático* y en un *espacio vacío*, libre de condiciones de contorno tenemos

$$V(\bar{r}_o) = k \int \frac{\rho(\bar{r}')}{|\bar{r}_o - \bar{r}'|} dv'$$

donde r_o indica el punto de observación y r' numera los elementos de carga $\rho(r')dv'$ distribuidos en volumen que crean el campo. El potencial retardado parte de la expresión anterior, pero ahora la densidad de carga en un punto r' varía con el tiempo y hay que considerar el elemento de carga en r' en un instante anterior t_r respecto al tiempo de observación t_o ; estando estos tiempos relacionados por la propagación de una onda esférica a la velocidad c

$$V(\bar{r}_o, t_o) = k \int \frac{\rho(\bar{r}', t_r)}{|\bar{r}_o - \bar{r}'|} dv' \quad ; \quad t_r = t_o - \frac{1}{c} |\bar{r}_o - \bar{r}'|$$

Dadas unas coordenadas de observación t_o, r_o , para cada posible punto-fuente r' existe un tiempo de retardo $t_r(t_o, r_o, r')$ determinado, donde puede ser incluso $\rho(r', t_r) = 0$ y no contribuir al potencial retardado. Utilizando la delta de Dirac podemos factorizar funcionalmente $\rho(r', t_r)$ de esta forma

$$\rho(\bar{r}', t_r) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\bar{r}', t) \delta(t - t_r) dt$$

de modo que en la parte derecha de la ecuación tenemos ahora una auténtica función densidad $\rho(r', t)$ de variables independientes r' y t . En el caso en que el campo lo crea una carga puntual, nuestra distribución de carga puede representarse también mediante la delta de Dirac introduciendo $r_Q(t)$, que representa los puntos de la trayectoria de la carga puntual Q :

$$\begin{aligned} \rho(\bar{r}', t) &= Q \delta(\bar{r}' - \bar{r}_Q(t)) \Rightarrow \\ \rho(\bar{r}', t_r) &= \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\bar{r}', t) \delta(t - t_r) dt = \int_{-\infty}^{\infty} Q \delta(\bar{r}' - \bar{r}_Q(t)) \delta(t - t_r) dt \end{aligned}$$

Introduciendo este resultado en el potencial eléctrico retardado y cambiando el orden de integración tenemos

$$k \int dv' \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{Q \delta(\bar{r}' - \bar{r}_Q(t)) \delta(t - t_r)}{|\bar{r}_o - \bar{r}'|} = k \int_{-\infty}^{\infty} dt \int dv' \frac{Q \delta(\bar{r}' - \bar{r}_Q(t)) \delta(t - t_r)}{|\bar{r}_o - \bar{r}'|} = kQ \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{\delta(t - t_{r(Q)})}{|\bar{r}_o - \bar{r}_Q(t)|}$$

Dado que resulta una integral extendida en la variable tiempo, debemos considerar el argumento de la delta de Dirac como una función $f(t)$ de la variable tiempo, de modo que podemos aplicar el resultado calculado en la sección anterior sobre la delta de Dirac

$$f(t) = t - t_o + \frac{1}{c} |\bar{r}_o - \bar{r}_Q(t)| \quad ; \quad \delta(f(t)) = \sum_i \frac{\delta(t - t_0^i)}{|df/dt|_{t_0^i}} \quad ; \quad t_0^i = t_r$$

donde i numera los instantes de tiempo en que $t-t_r$ se anula, es decir, los tiempos retardados; con la salvedad de que, fijados el tiempo y posición del observador t_o , r_o y la posición de la fuente r' el tiempo correspondiente de retardo t_r , como puede demostrarse, es *único*. Por tanto el sumatorio anterior se reduce a un solo término

$$\left. \frac{df}{dt} \right|_{f=0} = \left. \frac{\partial}{\partial t} \left(t - t_o + \frac{1}{c} |\bar{r}_o - \bar{r}_Q| \right) \right|_{t=t_r} = \left. \left[1 - \frac{1}{c} \frac{(\bar{r}_o - \bar{r}_Q)}{|\bar{r}_o - \bar{r}_Q|} \cdot \frac{\partial \bar{r}_Q}{\partial t} \right] \right|_{t=t_r} = \left. \left[1 - \frac{(\bar{r}_o - \bar{r}_Q(t_r))}{|\bar{r}_o - \bar{r}_Q(t_r)|} \cdot \frac{\bar{v}_Q(t_r)}{c} \right] \right|$$

Dado que, según la relatividad, debe ser siempre $v_Q < c$ podemos prescindir del módulo ya que el argumento será siempre positivo; y sustituido en la expresión del potencial retardado produce

$$kQ \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{\delta(t-t_r)}{|\bar{r}_o - \bar{r}_Q(t)|} = kQ \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{\delta(t-t_{f=0})}{|\bar{r}_o - \bar{r}_Q(t)| - (\bar{r}_o - \bar{r}_Q(t_r)) \cdot \frac{\bar{v}_Q(t_r)}{c}} \Rightarrow$$

$$V(\bar{r}_o, t_o) = \frac{kQ}{|\bar{r}_o - \bar{r}_Q(t_r)| - (\bar{r}_o - \bar{r}_Q(t_r)) \cdot \frac{\bar{v}_Q(t_r)}{c}}$$

Retomando el caso con que iniciamos esta sección, vemos que la primera modificación del potencial respecto al caso estático que percibe el observador es debida a la velocidad v_Q que adquiere la carga que crea el campo. Además si la velocidad es mucho menor que c la modificación puede despreciarse, aunque el potencial V debe seguirse evaluando en el tiempo retardado t_r . Podemos percibir el retardo temporal imaginando que el sistema evoluciona hacia atrás en el tiempo partiendo del instante t_o . En este caso imaginamos que en t_o se emite una onda esférica a velocidad c desde el observador (r_o) que progresa en el espacio a medida que el tiempo decrece, y la partícula Q se mueve recuperando posiciones anteriores de su trayectoria. Ya que en el *vacío* nada se puede mover por encima de la velocidad de la luz⁶ (c), vemos intuitivamente que existirá un momento determinado en que la onda esférica alcance a Q ; ese momento es el tiempo retardado. Los potenciales retardados corresponden en electromagnetismo al *gauge de Lorenz*.

⁶ En el *efecto Cerenkov* aparecen partículas subatómicas cargadas moviéndose en un dieléctrico (cristal, agua...) por encima de la velocidad de la luz. El medio no es el vacío y la velocidad de la luz (o velocidad de propagación de los cambios en campos electromagnéticos) corresponde al índice de refracción en dicho medio; donde estas partículas se mueven mas rápido que su propio campo eléctrico.