MECÁNICA TEÓRICA

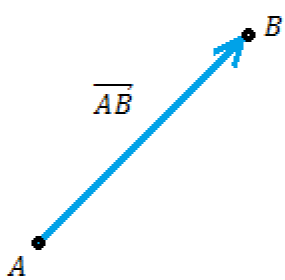
Departamento de Física y Geología
Facultad de Ciencias Básicas
Taller **B**, (Vectores en 2D y 3D.)
Docente: (*Fís. M. Sc.) Alexánder Contreras*
www.alexander.fisica.ru
alexandercontreras716@gmail.com

(No te conformes con la limitación de los presentes ejercicios, la Física es un Universo de infinitas particularidades; siempre habrá algo nuevo que aprender…)
(El presente taller es únicamente una guía de estudio, NO DEBE ENTREGARSE)

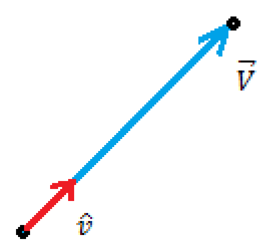
"El aprendizaje no se logra por casualidad, debe buscarse con pasión y atenderse con esmero"… (Un personaje)

"Lloraba porque no tenía zapatos y dejé de hacerlo hasta que vi a alguien que no tenía pies"… (Un personaje)

ÁLGEBRA VECTORIAL



En física, un vector se reconoce como un "segmento de recta dirigido, o como una cantidad que posee magnitud y dirección". Por ejemplo, la figura muestra una recta que une a dos puntos (A y B) en un sentido o dirección. (Un vector puede denotarse con cualquier letra, el requisito fundamental es trazar una flecha sobre ella.)

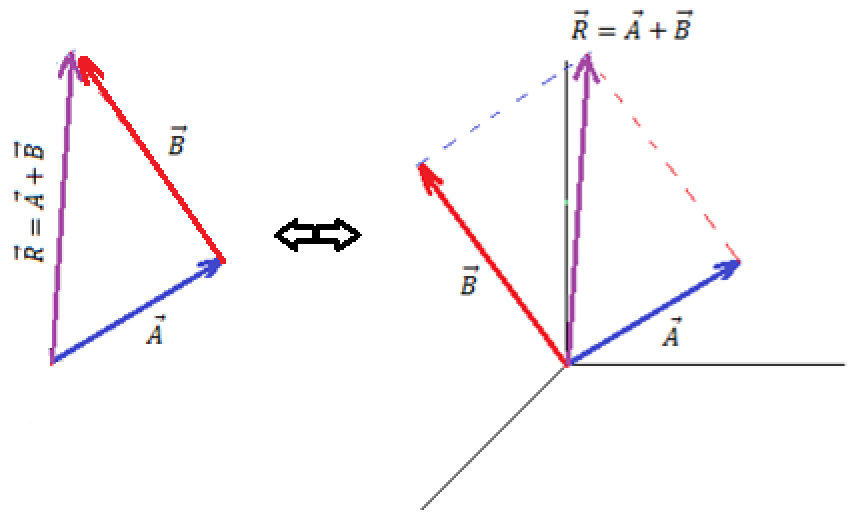


Dicho vector $\vec{V}$, puede ser generado desde un vector base o unidad llamado vector unitario $\hat{v}$, tal que el vector inicial resulte del producto de un número real escalar y un vector unitario:

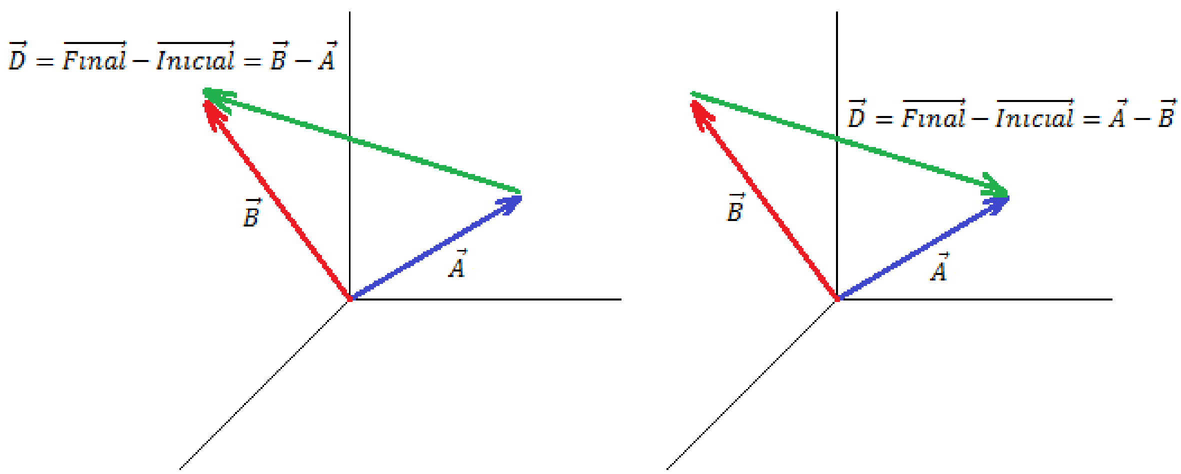
$\vec{V} \equiv V\hat{v}$ (ó también escrito como $\vec{V}=\|\vec{V}\|\hat{v}$)

Por otra parte, cuando se trata de sumar o restar vectores gráficamente:

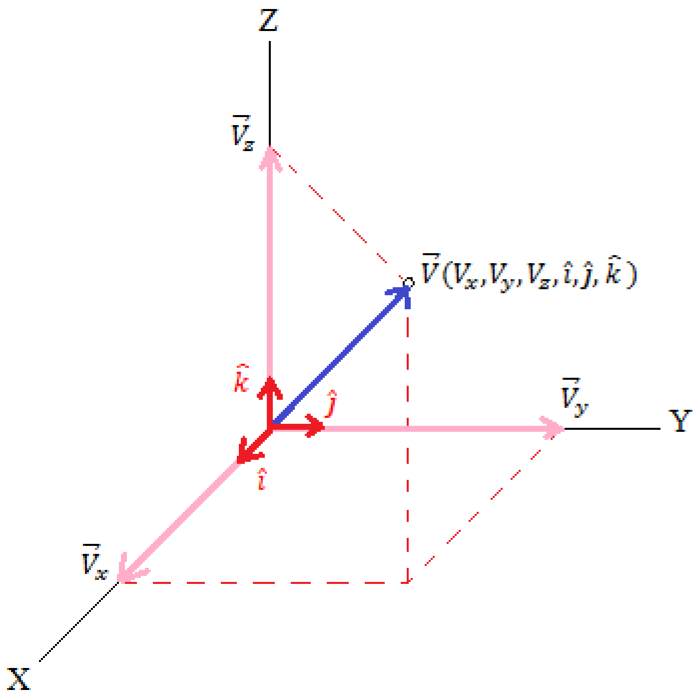
* <u>Para la suma, existe la trayectoria a segmentos dirigidos y/o el método del paralelogramo</u>: (el cual se caracteriza por ser conmutativo)



* Para la resta, existe el vector diferencia: (el cual se caracteriza por ser anticonmutativo y por ende se presta para los dos sentidos direccionales con idéntica longitud)



En conclusión, un vector puede hacerse depender de otros vectores; así como ocurrió para el vector resultante, que se obtuvo desde la suma de dos o más vectores; o también, como ocurrió con el vector diferencia o distancia, desde la resta de dos vectores. Siendo así, en consecuencia, debe existir dualidad en el proceso, tal que en sentido inverso, a partir de un único vector se obtenga otros vectores, fenómeno conocido como descomposición vectorial. La figura muestra la descomposición de un vector 3D en tres vectores unidimensionales a cada eje cartesiano ($\vec{V}_x$, $\vec{V}_y$, $\vec{V}_z$), para los cuales existe una dirección unitaria constante definida ($\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$, $\hat{k}$):



Luego, la notación físico-matemática para el vector o trayecto dirigido tridimensional $\vec{V}$ es equivalente a rodear unidimensionalmente por cada eje cartesiano hasta conectar con el punto de destino:

$$\vec{V} = \vec{V}_x + \vec{V}_y + \vec{V}_z = V_x\hat{\imath} + V_y\hat{\jmath} + V_z\hat{k}$$

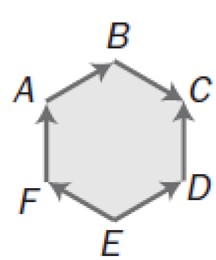
Finalmente, para la suma y resta de vectores algebraica, se apoya el proceso en base a los vectores unitarios que resulta factores comunes, reduciendo la operación a la suma o resta de las componentes o coeficientes amplificadores de dichos vectores unidad:

$$\vec{A} \pm \vec{B} = (A_x \pm B_x)\hat{\imath} + \left(A_y \pm B_y\right)\hat{\jmath} + (A_z \pm B_z)\hat{k}$$

Ejercicios de vectores

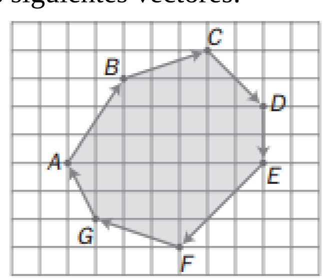
[16] En la figura se muestra un hexágono regular, se observa que cada lado precisa con cierto vector. Del listado a continuación, seleccione las afirmaciones correctas:

a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{ED}$ b) $\overrightarrow{FA} = -\overrightarrow{DC}$ c) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{FE}$ d) $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{FE}$



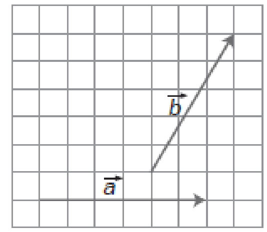
[17] Dado el heptágono irregular de la figura. Dibuje los siguientes vectores:

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$
b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$
c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE}$
d) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF}$
e) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG}$



[18] Dados los vectores libres de la figura, calcule:

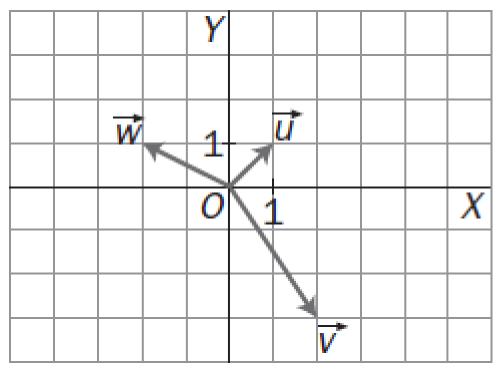
a) $\vec{a} + \vec{b}$ b) $\vec{a} - \vec{b}$ c) $3\vec{a}$ d) $3\vec{a} - 2\vec{b}$



[19] Dibujar los siguientes vectores en el plano cartesiano 2D y 3D, según corresponda.

a) $\vec{a} = -4\hat{\imath} - \hat{\jmath}$;
b) $\vec{b} = 7\hat{\imath} + 5\hat{\jmath}$;
c) $\vec{c} = -3\hat{\imath} + 8\hat{\jmath}$;
d) $\vec{d} = -9\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - 6\hat{k}$;
e) $\vec{e} = 0\hat{\imath} - 6\hat{\jmath} - 4\hat{k}$;

[20] Obsérvese los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ representados en la figura (cada cuadricula tiene lado de 1[cm]). Descompóngales en coeficientes cartesianos y vectores unitarios, y calcule:



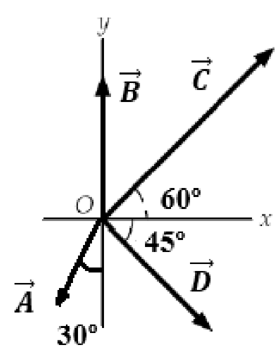
a) $\vec{u} + \vec{v}$
b) $3\vec{v}$
c) $-\vec{u} + 2\vec{w}$
d) $2(\vec{u} + \vec{v}\,) - 3\vec{w}$

[21] Un aeroplano viaja 209k[m] en línea recta formando un ángulo de 22.5º al norte desde el este. ¿A qué distancia al norte (r_y) y a qué distancia al este (r_x) viajó el aeroplano desde el punto de partida?

a) $r_x = 193.09[m]\,; r_y = 79.98[m]$ **B)** $r_x = 633500.0731[ft]\,; r_y = 24378.15923[ft]$
c) $r_x = 3459.2[yardas]\,; r_y = 2345{,}3[yardas]$ d) $r_x = 234.6[millas]\,; r_y = 164.7[millas]$

[22] Cuatro vectores de desplazamiento de un juego de croquet ball se muestran en la figura, donde sus magnitudes son A= 2[m], B= 4[m], C=10[m] y D=7[m]. Hallar:

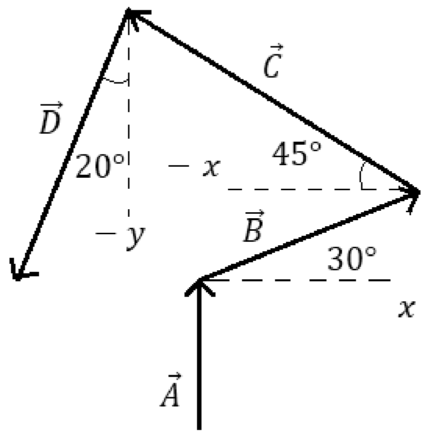
a) el vector resultante,
b) magnitud,
c) dirección
d) gráfica.



(Respuesta: a) $\vec{R} = (8{,}94\hat{\imath} + 5{,}99\hat{\jmath})[m]$; b) $|\vec{R}| = R = 10{,}76[m]$; c) $\phi = 33{,}82°$ con respecto al eje X en el primer cuadrante)

[23] Una persona sale a caminar y realiza las trayectorias mostradas en la figura. Donde $|\vec{A}| = 4[m]$, $|\vec{B}| = 6[m]$, $|\vec{C}| = 10[m]$ y $|\vec{D}| = 7[m]$. Al desplazamiento final (suma de vectores), hallar:

a) el vector resultante,
b) magnitud,
c) dirección
d) gráfica.



(Respuesta: a) $\vec{R} = (-4{,}27\hat{\imath} + 7{,}5\hat{\jmath})[m]$; b) $R = 8{,}63[m]$; $\phi = -60{,}34°$ con respecto al eje –X en el segundo cuadrante en contra de las manecillas reloj)

[24] A un faro se le instala un novedoso sistema que detecta a través de campos electromagnéticos naves (barcos, aviones, etc). En cierto instante, éste observa un helicóptero una altitud de 1700[m] y a una distancia radial cilíndrica $XY(\rho = 5.5[km], \phi = 90°)$. Inmediatamente, detecta un barco a punto de hundirse y a una distancia radial cilíndrica $XY(\rho = 3.8[km], \phi = 225°)$. Despreciando la altura de faro, hallar:

a) El vector posición del helicóptero $(\vec{H})$ con respecto al faro:
b) El vector posición del barco $(\vec{B})$ con respecto al faro:
c) El helicóptero va inmediatamente al rescate de la tripulación, qué distancia en línea recta debe recorrer?
d) Cuál es la dirección, escrita vectorialmente, que debe seguir el helicóptero hacia el barco?

(Respuesta: a) $\vec{H} = \left(0\hat{\imath} + 5{,}5\hat{\jmath} + 1{,}7\hat{k}\right)[km]$; b) $\vec{B} = \left(-2{,}68\hat{\imath} - 2{,}68\hat{\jmath} + 0\hat{k}\right)[km]$; c) $|\vec{D}| = D = |\vec{F}inal - \vec{I}nicial| = 8{,}77[km]$; d) $\hat{v} = -0{,}30\hat{\imath} - 0{,}93\hat{\jmath} - 0{,}19\hat{k}$)

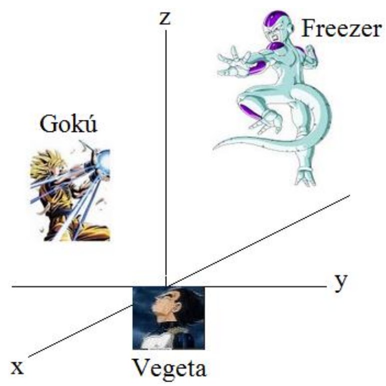
[25] Un Jet pasea por el espacio aéreo terrestre. Casualmente, el radar del aeroplano detecta a kilómetros delante de la vista del piloto (en $t = 0$), a un diminuto meteorito que va a impactar contra una pequeña ciudad. La posición inicial del meteorito se encuentra en el punto cartesiano $(x, y, z) = (7{,}1{,}8)[km]$ con respecto al Jet. Inmediatamente, sin pensarlo dos veces, el piloto actúa lanzando un proyectil en línea recta y a velocidad constante a la dirección que él radar le indicó. Finalmente, con éxito, el proyectil coincide y destruye al meteorito en la posición definida por el punto cilíndrico $(\rho, \phi, z) = (10[km], 270°, -3[km])$ con respecto al Jet. Si la velocidad del proyectil fue de $v_P = 1000[km/h]$, calcular:

a) El vector posición inicial del meteorito $\vec{M}_0$ (detectado por primera vez) con respecto al Jet;
b) El vector posición final del meteorito $\vec{M}_F$ cuando fue destruido con respecto al Jet;
c) El tiempo t que tardó el proyectil P en llegarle al meteorito;
d) La velocidad media con la que caía el meteorito;

e) La dirección con la que se dirigía el meteorito antes de ser destruido.
(Sugerencia: Ubique de la forma más simple e ingeniosa su sistema de referencia, también desprecie el efecto gravitacional, imagínese todos los objetos cinemáticos a velocidad constante y en línea recta $r = vt$).

(Respuesta: a) $\vec{M}_0 = (7\hat{\imath} + 1\hat{\jmath} + 8\hat{k})[km]$; b) $\vec{M}_F = (0\hat{\imath} - 10\hat{\jmath} - 3\hat{k})[km]$; c) $t = 37{,}58[s]$; d) $\bar{v} = 1949{,}33[Km/h]$; e) $\hat{v} = -0{,}83\hat{\imath} - 0{,}05\hat{\jmath} - 0{,}54\hat{k}$)

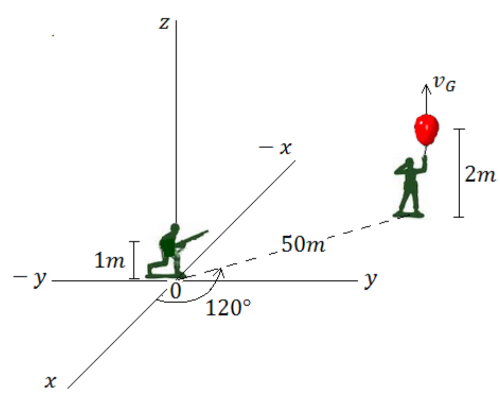
[26] En una batalla épica, se enfrentan Gokú y Freezer. Después de un intercambio de golpes entre ellos, ambos se despliegan a diferentes posiciones las cuales son detectadas por Vegeta quien observa resignadamente la pelea en el origen de coordenadas $\vec{0} = 0\hat{\imath} + 0\hat{\jmath} + 0\hat{k}$; en dicho instante ($t = 0$), él localiza a Gokú en la posición $G(x; y; z) = G(-30; -50;\ 2)[m]$ y localiza a Freezer a una altura 100m con una distancia radial polar $XY_F(\rho_F = 40m;\ \phi_F = 60°)$, así como se observa en la figura. De inmediato y sorpresivamente, Gokú ataca con un kamehamehá lanzado en línea recta a la ubicación de Freezer y éste último recibe el impacto directo. De acuerdo a lo anterior, determine:



a) El vector posición de Gokú $\vec{G}$;
b) El vector posición de Freezer $\vec{F}$;
c) La distancia en línea recta que existe entre Gokú y Freezer;
d) La dirección a la cual Gokú lanzó el kamehamehá (escrita vectorial y angular);
e) Si el tiempo que tardó el kamehamehá en llegarle a Freezer fue de 2 segundos, entonces, ¿cuál fue su velocidad media?.

(Resp: c) $D = 138.8[m]$; d) $\hat{v} = 0{,}36\hat{\imath} + 0{,}61\hat{\jmath} + 0{,}70\hat{k}$ (ó 68.89º, 52,41º, 45,57º); e) 69,4[m/s])

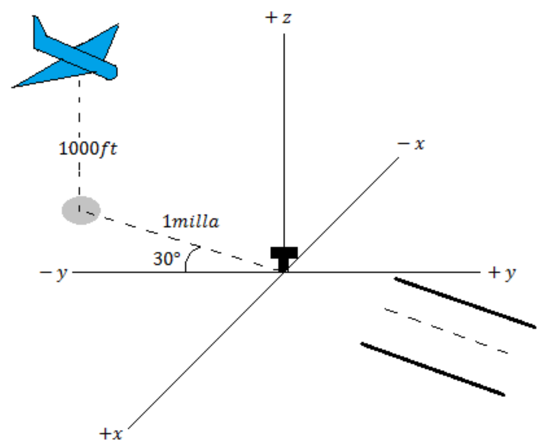
[27] En un campo de entrenamiento militar caracterizado por tener geometría plana, dos soldados practican tiro al blanco. Ellos desean aumentar el grado de dificultad empleando la siguiente estrategia: El soldado A, ubicado en la posición cilíndrica $A(\rho_A; \phi_A; z_A)$, posee un globo G relleno de helio en sus manos a una altura de $2m$ y preparado para ser soltado; dicha posición inicial del globo $G_0(\rho_{0G}; \phi_{0G}; z_{0G})$ es detectada por el soldado tirador T, éste último se encuentra ubicado en el origen de coordenadas y posee un arma en sus manos a una altura de $1m$, así como se muestra en la figura. En el instante $t = 0$, el Soldado A suelta el globo G y éste se propaga verticalmente hacia arriba con una velocidad constante $v_G = 4m/s$; simultáneamente, el Soldado tirador T apunta con su arma a la posición parcial del globo y a los 3 segundos de seguirle, dispara. Si la bala B se propaga en línea recta y si lo hace a una velocidad extremadamente rápida, de tal forma que destruya al globo instantáneamente; en coordenadas cartesianas, determine:



a) El vector posición inicial $\vec{G}_0$ del globo en coordenadas cartesianas;
b) El vector posición inicial de la bala $\vec{B}_0$ dentro del arma;
c) El vector posición final $\vec{G}_F$ del globo al momento de ser destruido;
d) La distancia recorrida por la bala desde el arma hasta el globo;
e) La dirección vectorial a la cual apuntó en definitiva el soldado T.

(Respuesta: c) $\vec{G}_F = (-25\hat{\imath} + 43{,}3\hat{\jmath} + 14\hat{k})[m]$; d) $D = 51{,}66[m]$)

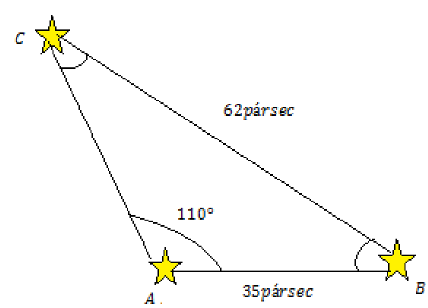
[28] A las 12:00:00 horas de cierto día, la torre de control de un aeropuerto le da el aval de aterrizaje a un avión que está precisamente posicionado frente a la pista dispuesto a interceptar pista. (La posición inicial de la aeronave se muestra en la Figura). A medida que evoluciona el tiempo, el avión desciende en línea recta con una velocidad constante de 200km/h; finalmente, el avión aterriza (ó toca por primera vez la pista) en la posición radial cilíndrica final ρ_F=700m. Es importante aclarar, así como se intenta mostrar en la Figura, que durante el proceso de descenso del avión, la sombra del mismo en su trayectoria sobre el plano XY pasa en línea recta sobre la torre de control hasta coincidir lógicamente con el avión cuando éste aterriza sobre la pista. Bajo las anteriores circunstancias, la hora en la cual el avión tocaría por primera vez la pista de aterrizaje será: (los resultados se dan en horas, minutos y segundos)



A) 12:00:41 b) 12:00:15 c) 12:01:03 d) Ninguna de las anteriores

EJERCICIOS DE TEOREMA DE SENO Y COSENO

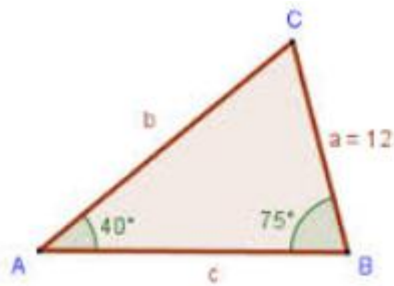
[29] El telescopio espacial Kepler detecta tres estrellas en el vacío así como se muestra en la figura. Si 1 pársec = $206843{,}96$ u.a. La distancia entre la estrella A y C es:



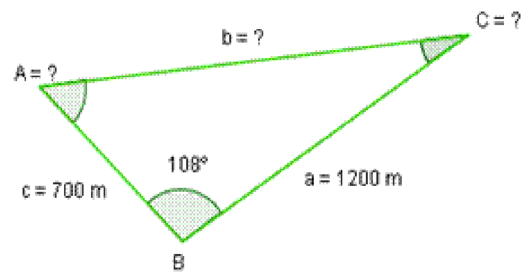
A) $8{,}39M\ [u.a.]$ b) $12{,}5K[u.a.]$

c) $6{,}7G[u.a.]$ d) Ninguna

[30] Con base a los datos mostrados en las figuras, hallar el valor numérico de las demás incógnitas de los triángulos No rectángulos.



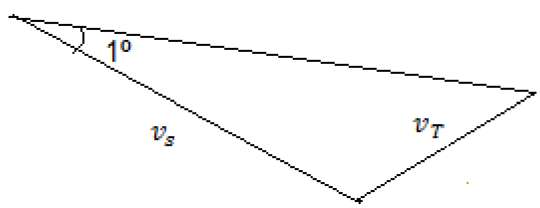
a)



b)

(Resp: a) $b = 18{,}03[m]$; $c = 16{,}91[m]$; $\gamma = 65°$. b) $b = 1564{,}97[m]$; $\beta = 46{,}84°$; $\alpha = 25{,}25°$)

[31] El telescopio espacial Hubble se desplaza a velocidad de $v_T = 7{,}5[\text{Km/s}]$ con respecto al sistema solar. Ahora, el sistema solar se desplaza a una velocidad de $v_S = 220[\text{Km/s}]$ con respecto a la Vía Láctea (nuestra galaxia). Desde el agujero negro ubicado en el centro de la Vía Láctea se detecta el movimiento del telescopio definido, en cierto instante de tiempo, por la figura:



Bajo dicha circunstancia particular, hallar la velocidad neta del telescopio con respecto a la galaxia.

(Resp: $v_R = 213{,}66[km/s]$)

Éxitos!...