MECÁNICA TEÓRICA

Departamento de Física-Geología
Facultad de Ciencias Básicas
Taller **C**, (Multiplicación entre vectores)

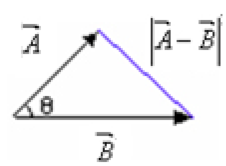
Docente: *Alexánder Contreras* (*Físico, M. Sc.*)
www.alexander.fisica.ru
alexandercontreras716@gmail.com

(No te conformes con la limitación de los presentes ejercicios, la Física es un Universo de infinitas particularidades; siempre habrá algo nuevo que aprender…)
(El presente taller es únicamente una guía de estudio, NO DEBE ENTREGARSE)

"Las grandes almas poseen voluntad, las almas débiles poseen deseos escondidos bajo pretextos"… (Un personaje)

PRODUCTO ESCALAR

Es una operación algebraica que toma dos secuencias de números de igual longitud (usualmente en la forma de vectores) y retorna un único número. Ésta operación se comprende a partir de sus propiedades geométricas y se hace desde el teorema del coseno (para triángulo cerrado):



$$d^2 = \left|\vec{A}-\vec{B}\right|^2 = \left|\vec{A}\right|^2 + \left|\vec{B}\right|^2 - 2\left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right| Cos\theta$$

Dado que es la misma distancia obtenida por dos procedimientos diferentes, se hace evidente la igualdad:

$$(A_x - B_x)^2 + (A_y - B_y)^2 + (A_z - B_z)^2 = \left|\vec{A}\right|^2 + \left|\vec{B}\right|^2 - 2\left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right| Cos\theta$$

La cual se puede reducir de forma algebraica como sigue:

$$A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 + B_x^2 + B_y^2 + B_z^2 - 2(A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z) = \left|\vec{A}\right|^2 + \left|\vec{B}\right|^2 - 2\left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right| Cos\theta$$

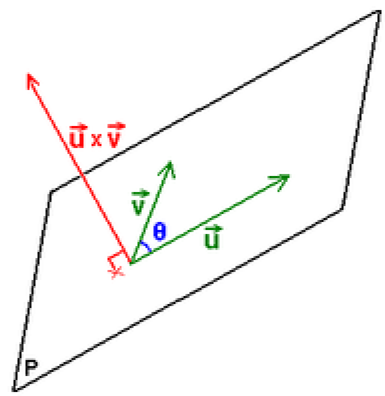
Esto es equivalente a:

$$|A|^2 + |B|^2 - 2(A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z) = \left|\vec{A}\right|^2 + \left|\vec{B}\right|^2 - 2\left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right| Cos\theta$$

Cuando se cancelan los factores comunes a ambos lados de la igualdad se llega a la ecuación mas conocida del producto escalar de vectores:

$$A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z = \boxed{\left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right| Cos\theta = \vec{A}\bullet\vec{B}}$$

PRODUCTO VECTORIAL



Define un vector perpendicular al plano generado por dos vectores conectados desde sus orígenes y dispersos un ángulo θ. La longitud de ese nuevo vector $\vec{u} \times \vec{v}$ equivale a el área del paralelogramo ($|\vec{u} \times \vec{v}\ |$) formado por los vectores iniciales y también puede hallarse opcionalmente de la forma:

$|\vec{u} \times \vec{v}\ | = |\vec{u}||\vec{v}|sin\theta$

EJERCICIOS DE PRODUCTO ESCALAR Y VECTORIAL

[32] Dados vectores: $\vec{A} = 2\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} - \hat{k}$; $\vec{B} = -4\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + 2\hat{k}$ y $\vec{C} = 7\hat{\imath} + 4\hat{k}$. Determinar:

a) $||\vec{B} - \vec{A}||$
b) $2\vec{C} - \vec{B} + 4\vec{A}$
c) $(\vec{B} - \vec{A}) \cdot \vec{C}$
d) $-3(\vec{B} - \vec{C}) \times \vec{A}$
e) El ángulo que forma el vector $\vec{A}$ con cada uno de los ejes coordenados x, y, z.
f) El ángulo entre los vectores: $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

(Resp: a) 9; b)$26\hat{\imath} - 15\hat{\jmath} + 2\hat{k}$; c) -30; d)$-27\hat{\imath} - 45\hat{\jmath} + 81\hat{k}$; e) $57{,}68°; 143{,}3°; 105{,}5°$; f) 160,5º)

[33] Considere los vectores: $\vec{A} = 4\hat{\imath} - 3\hat{\jmath}$,

$\vec{B} = 2\hat{\imath} + 10\hat{k}$,
$\vec{C} = -7\hat{\imath} - \hat{k}$.

Demostrar que: $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$.

(Respuesta: a) $-272\hat{k} = -272\hat{k}$)

[34] Del producto escalar, suponga que $\vec{A} \cdot \vec{B} > 0$. Ello implica que el ángulo $\propto$ entre los vectores pertenece al dominio:

A) $0 \leq \propto \leq 90°$ b) $\propto = 90°$ c) $90° \leq \propto \leq 180°$ d) $\propto = 180°$