MECÁNICA TEÓRICA

Departamento de Física-Geología
Facultad de Ciencias Básicas
Taller **D**, (Cinemática)
Docente: *Alexánder Contreras* (*Físico, M.Sc.)*
www.alexander.fisica.ru
alexandercontreras716@gmail.com

(No te conformes con la limitación de los presentes ejercicios, la Física es un Universo de infinitas particularidades; siempre habrá algo nuevo que aprender…)
(El presente taller es únicamente una guía de estudio, NO DEBE ENTREGARSE)

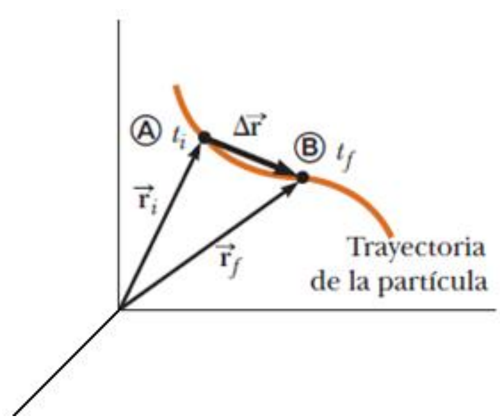
"No hay ascensor al éxito, debes tomar las escaleras"… *(Un personaje)*

Más allá de que nunca se debe abandonar la academia, ***"No te preocupes por ser una persona de éxito, mejor preocúpate por ser una persona de valor"...*** *(Un personaje)*

"Adoro al Universo, a la naturaleza y sé de su problemática ambiental; por tal motivo, lo mínimo que puedo dejar de hacer por ella, por mí y por los demás, es NO FUMAR, al menos con ello evitaría la producción excesiva de huracanes en el planeta"… *(Un personaje)*

CINEMÁTICA

Introducción (Vector desplazamiento, velocidad y aceleración)



El vector desplazamiento o vector diferencia define la distancia dirigida entre un punto A y un punto B, ambos detectados por un vector inicial y final, respectivamente, tomados desde la trayectoria realizada por una partícula.

$$\Delta\vec{r} = \vec{D} = (\vec{r}_{final} - \vec{r}_{inicial})\ [\text{m}]$$

La velocidad media o promedio se define como la variación de la posición de la partícula a través del tiempo:

$$\vec{v}_{media} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_{final} - \vec{r}_{inicial}}{t_{final} - t_{inicial}}\ [\text{m/s}]$$

La velocidad instantánea se define como el límite de la velocidad media en un efímero intervalo temporal:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \text{ [m/s]}$$

La <u>aceleración media o promedio</u> se define como la variación de la velocidad de la partícula a través del tiempo:

$$\vec{a}_{media} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_{final} - \vec{v}_{inicial}}{t_{final} - t_{inicial}} \text{ [m/}s^2\text{]}$$

La <u>aceleración instantánea</u> se define como el límite de la aceleración media en un efímero intervalo temporal:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} \text{ [m/}s^2\text{]}$$

Demostración de la ecuación cinemática vectorial general

Considérese una partícula cuyo movimiento depende una "aceleración constante" (tanto en magnitud como en dirección). Al sustituir ésta particularidad en la definición de aceleración instantánea, integrando se tiene:

$$\int_{v_0}^{v} d\vec{v} = \int_{t_0}^{t} \vec{a}\, dt \qquad \longrightarrow \qquad \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}(t - t_0)$$

dando como resultado la velocidad final vectorial en cualquier instante de tiempo de la partícula. El término $-t_0$ refiere a un desface temporal a manera de retraso. Por último, sustituyendo éste resultado en la definición de velocidad instantánea, integrando se tiene: (donde $\vec{v}_0$ y $\vec{a}$ son constantes)

$$\int_{r_0}^{r} d\vec{r} = \int_{t_0}^{t} [\vec{v}_0 + \vec{a}(t - t_0)]\, dt$$

$$\boxed{\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\vec{a}(t - t_0)^2}$$

A ésta última ecuación se le conoce como *"ecuación vectorial cinemática posicional en cualquier instante de tiempo"*. Donde de ésta última puede deducirse fácilmente, las *ecuaciones generales en cualquier instante de tiempo para la velocidad y aceleración*:

$$\boxed{\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \quad ; \quad \vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt}}$$

Cinemática escalar

Alternativamente al método anterior, puede utilizarse las ecuaciones cinemáticas típicas galileanas escalares:

Movimiento Rectilíneo Uniforme (M.R.U.) — Movimiento Rectilíneo Variado (M.R.V.)

$$x = vt$$

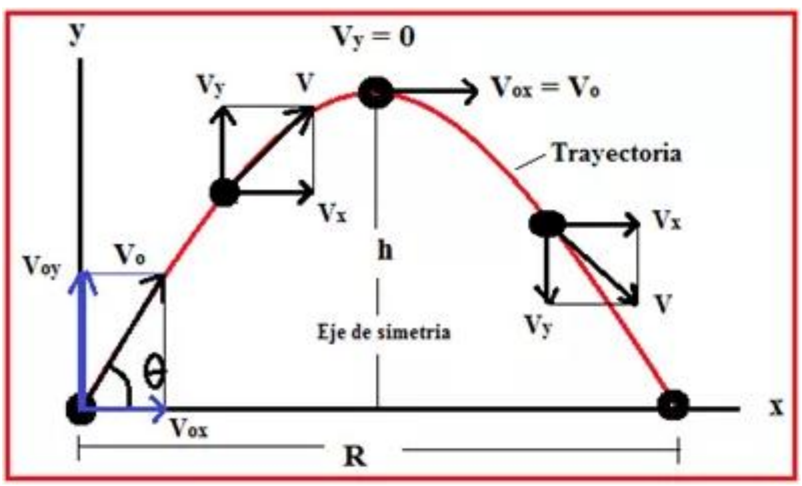
$$v_f = v_0 \pm at$$

$$v_f^2 = v_0^2 \pm 2ax$$

$$x = x_0 + v_0 t \pm \frac{1}{2} a t^2$$

Donde la dimensión espacial x puede ser representado como y ó z; el signo $+$ representa movimiento acelerado, mientras que el signo $-$ representa movimiento desacelerado; cuando se analizan movimiento curvilíneos debido a interacciones gravitacionales, la aceleración en la debida dimensión es la gravedad g del cuerpo celeste.

Ahora, cuando se trata de éste último caso, movimiento parabólico a causa de la aceleración gravitacional, cuya trayectoria general es:



La velocidad inicial bidimensional v_0 puede descomponerse unidimensionalmente desde el triángulo de la figura:

$$v_{0x} = v_0 \cos\theta \qquad ; \qquad v_{0y} = v_0 \sin\theta$$

De ésta forma, puede escribirse las ecuaciones cinemáticas propias de cada dimensión: (para lo cual en el eje X el movimiento es uniforme y en el eje Y el movimiento es variado debido a la aceleración de la gravedad)

Movimiento Rectilíneo Uniforme (M.R.U.) — Movimiento Rectilíneo Variado (M.R.V.)

$$v_{fy} = v_{0y} \pm gt$$

$$x = v_{0x}t \qquad v_{fy}^2 = v_{0y}^2 \pm 2gy$$

$$y = y_0 + v_{0y}t \pm \frac{1}{2}gt^2$$

Finalmente, cuando el movimiento parabólico es SIMÉTRICO, es decir, parábola regular (altura inicial idéntica a la altura final), del acople de las anteriores ecuaciones surgen tres fórmulas más:

$$t_{vuelo} = \frac{2v_0 \sin\theta}{g}$$

$$R = x_{Alcance\ Horizontal} = \frac{v_0^2 \sin(2\theta)}{g}$$

$$h = y_{máxima} = \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g}$$

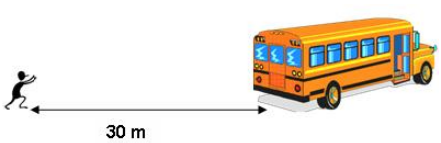
Ejercicios de cinemática unidimensional

[35] Una partícula se mueve unidimensionalmente de manera que su posición en cualquier instante de tiempo t (en segundos) está dada por la función $\vec{r}(t) = (5t^2 + 1)\hat{\imath}[m]$. De acuerdo a ello, calcular:

a) Su velocidad media (o promedio) en el intervalo de tiempo: $2s$ y $3s$
b) Su velocidad instantánea cuando $t = 2s$
c) Su aceleración media en el intervalo de tiempo: $2s$ y $3s$
d) Su aceleración instantánea cuando $t = 2s$.

(Respuesta: Para coincidir con las siguientes respuestas, sólo tome la magnitud del vector evaluado: a) $\bar{v} = 25[m/s]$; b) $v = 20[m/s]$; c) $\bar{a} = 10[m/s^2]$; d) $a = 10[m/s^2]$)

[36] La figura muestra a un pasajero dirigiéndose a tomar el autobús y que en el trayecto observa que justo cuando le faltan 30[m] para llegar a él, éste vehículo emprende la marcha con una aceleración de 0,3[m/s^2]. El pasajero tarda 1 segundo en reaccionar para iniciar con la persecución del autobús con velocidad constante de 6[m/s]. ¿Conseguirá el peatón alcanzar el autobús?, si es así, calcule en qué instante y en qué lugar tomando con referencia el origen de coordenadas del peatón cuando inició el movimiento.



(Respuesta: $t_1 = 7{,}35[s]$ donde $x_1 = 38[m]$ y/o $t_2 = 32{,}64[s]$ donde $x_2 = 189[m]$)

[37] Dos autos A y B, están en reposo y separados una distancia de 35m, de izquierda a derecha, respectivamente. El auto A decide partir hacia cierto destino determinado a una aceleración de

$a_A = 0.4[\frac{m}{s^2}]$ y en su trayecto rebasa la línea del auto B. Diez segundos después de haber partido el auto A, parte el auto B y se dirige en la misma dirección de A, lo hace a una aceleración de $a_B = 0.6[\frac{m}{s^2}]$. ¿En qué lugar y tiempo, se encontrarán los autos A y B?

(Respuesta: $t_1 = 14{,}18[s]$ donde $x_1 = 40{,}26[m]$ y/o $t_2 = 45{,}81[s]$ donde $x_2 = 419{,}73[m]$)

[38] Un auto (A) está inicialmente en reposo sobre una vía recta; repentinamente (en $t = 0$), por delante de su visión a una distancia de 20[m], él observa que de la nada (desde un cruce perpendicular a la vía por ejemplo), aparece un camión (C) que se aleja con una velocidad constante v_c =10[m/s] sobre la vía recta. Inmediatamente, por capricho, el conductor del auto (A) decide ir a la persecución del camión (C); para ello, él tarda 5 segundos encendiendo el auto y luego acelera a razón de $5[m/s^2]$. ¿En qué tiempo y qué lugar coincidirán el auto y el camión?

(Respuesta: sólo un resultado es razonable y es: $t = 12{,}65[s]$ donde $x = 146{,}56[m]$)

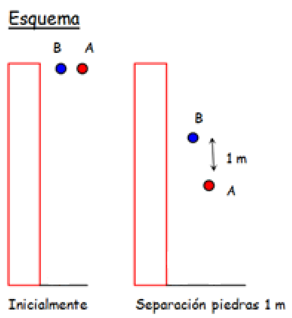
[39] Un automóvil con una velocidad inicial v_0 frena hasta detenerse con desaceleración constante en un tiempo t_1. Si la velocidad inicial del automóvil fuera el doble, pero la desaceleración constante fuera la mitad, el tiempo para detenerse sería:

a) $8t_1$ B) $4t_1$ c) $2t_1$ d) t_1

[40] Un cuerpo que cae recorre $224[fts]$ en el último segundo de su movimiento. Suponiendo que el cuerpo partió del reposo, determinar la altura desde la cual cayó y determinar el tiempo que tardó en recorrerla. (Sugerencia: esquematice la situación imaginariamente y atáquela en dos partes consecuentes)

(Respuesta: $272{,}71[m]$ y $7{,}45[s]$)

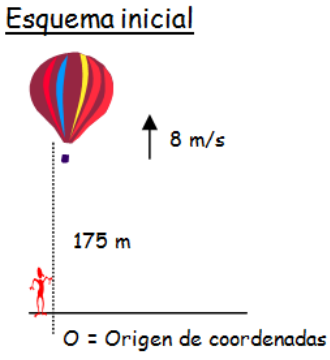
[41] Desde lo alto de una torre se dejan caer dos piedras, la segunda 0,1 [s] después de la primera. ¿Al cabo de cuánto tiempo la separación de las piedras será 1 metro? ¿Qué espacio habrán recorrido entonces cada una de las piedras?. (Sugerencia: ubicar el origen del sistema de coordenadas sobre la cima de la torre).



(Respuesta: $\vec{r}_A = -5{,}6[m]\,\hat{j}$ y $\vec{r}_B = -4{,}6[m]\,\hat{j}$)

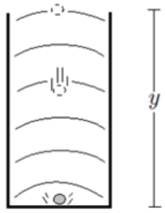
[42]. Desde un globo, a una altura de 175 m sobre el suelo y ascendiendo con una velocidad de 8 m/s, se suelta un objeto. Calcular:

a) La altura máxima alcanzada por el objeto desde el suelo;
b) La posición y la velocidad del objeto al cabo de 5segundos;
c) El tiempo que tardará en llegar al suelo;
d) la velocidad final con la que choca contra el piso.



(Resp.: a) $y_{máx} = 178{,}25[m]$; b) $\vec{r}(5) = 92{,}25[m]\hat{\jmath}$ y $\vec{v}(5) = -41{,}1[\frac{m}{s}]\hat{\jmath}$; c) $t_{Vuelo} = 6{,}84[s]$; d) $\vec{v}(5) = -59{,}16[\frac{m}{s}]\hat{\jmath}$.)

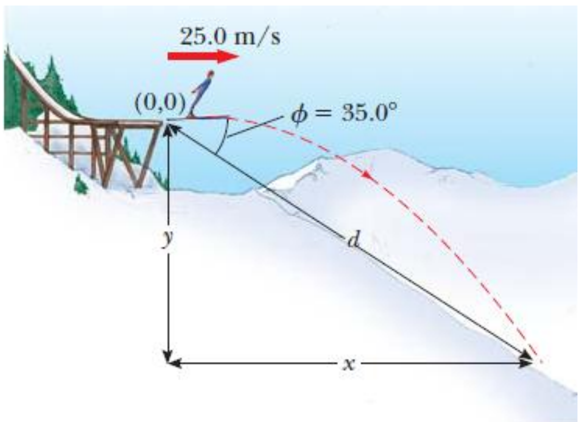
[43]. Se deja caer libremente una piedra desde la boca de un pozo de cierta altura h. Después de un tiempo $t = 5[s]$ se escucha el sonido de la piedra al tocar el fondo del pozo. Si la velocidad del sonido $v_s = 340[m/s]$, hallar la altura del pozo.



(Resp.: $h = 107{,}69[m]$)

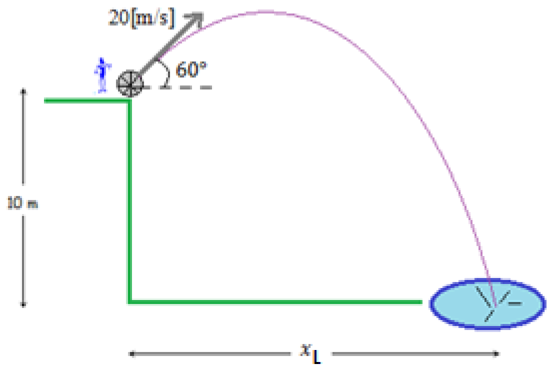
Ejercicios de cinemática Bidimensional

[44] Una esquiadora deja la rampa y se desliza en la dirección horizontal con una rapidez de 25m/s, como se muestra en la figura. El plano de aterrizaje bajo ella cae con una pendiente de 35°. ¿Dónde aterrizará en el plano?.



(Resp.: $d = 109[m]$)

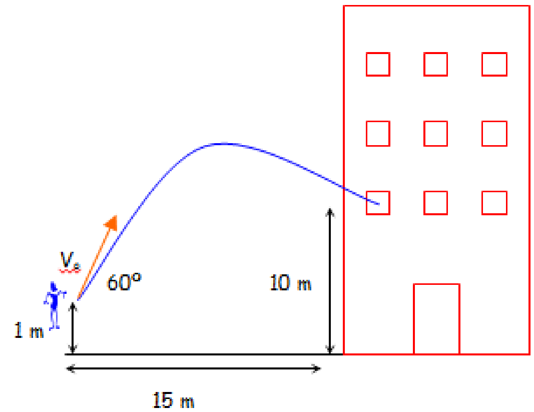
[45] Desde la cima de una montaña de 10[m] de altura, David Beckham patea una bola a una rapidez $v_B = 20[m/s]$ formando un ángulo de 60° por encima de la horizontal, hacia un lago que



está a distancia horizontal x_L desde los pies de la montaña y profundidad $y_L = 0$. Si la velocidad del sonido a temperatura ambiente es de $v_s = 340[m/s]$, ¿en cuánto tiempo se escuchará el sonido del balón al impactar el agua a partir del lanzamiento de la misma?

(Resp $t_{Total} = 4{,}15[s]$)

[46] Un bombero desea apagar el fuego en un edificio. Para ello deberá introducir agua por una ventana situada a 10 m de altura. Si sujeta la manguera a 1 metro del suelo, apuntándola bajo un ángulo de 60° hacia la fachada (que dista 15 m), ¿con qué rapidez v_{0A} debe salir el agua?

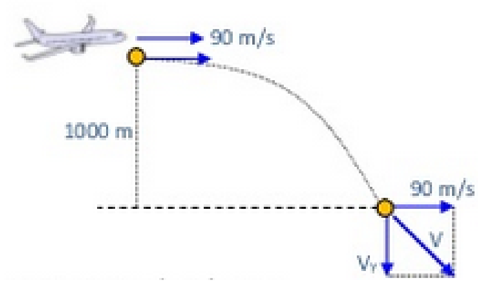


(Resp $v_0 = 16{,}13[m/s]$)

[47] En juego de fútbol, Juniho Pernambucano patea la bola de modo que adquiere una velocidad inicial de 20[m/s] a un ángulo de 40° sobre la horizontal positiva. A la distancia, Ronaldo de Souza (cual posee 1,8[m] de altura), preveía el gran pase de Juniho y de inmediato corre alejándose de él a una velocidad constante de 5m/s en el mismo plano de la trayectoria de la bola. ¿A qué distancia inicial x_{0R} debió estar Ronaldo de Juniho para que lograse golpear el balón con la cabeza sin necesidad de saltar?

(Resp $x_{0R} = 25{,}38[m]$)

[48] Un avión vuela horizontalmente a una velocidad de 90[m/s], deja caer una esfera desde una altura de 1000[m]. De acuerdo a ello, determine:



a) Cuál es la ecuación vectorial de velocidad de la esfera para cualquier instante de tiempo?;
b) con qué rapidez resultante choca la esfera contra la superficie terrestre?;
c) cuál es la dirección con la que choca la esfera contra el suelo?

(Resp a) $\vec{v}_E(t) = (90\hat{\imath} - 9{,}82t\hat{\jmath})[\frac{m}{s}]$; b) $||\vec{v}_E(14{,}27)|| = v_{Resultante} = 166{,}54\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]$; c) $\phi = -57{,}28°$ con respecto al eje X positivo)

[49] Se lanza un cuerpo oblicuamente hacia abajo desde una altura de 30 [m] sobre el suelo, con una velocidad inicial de 15[m/s] que forma un ángulo α con la horizontal positiva tal que sus componentes unitarias horizontal y vertical sean, cos α= 0.86 y sen α = 0.5, respectivamente. Calcular: a) el vector velocidad del objeto en el instante de llegar al suelo, b) la rapidez con la que choca contra el suelo.

(Resp a) $\vec{v}(1{,}82) = (12{,}9\hat{\imath} - 25{,}4\hat{\jmath})[\frac{m}{s}]$; b) $||\vec{v}(1{,}82)|| = v_{Resultante} = 28{,}48\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]$)

[50] En una plataforma de Siberia, juegan dos niños. Uno de ellos se encuentra en reposo (niño **B**) y se da cuenta que el otro (niño **A**), a una distancia de 30[m], le tiene en la mira y que posee una bola de nieve (**BN**) en sus manos; 1 segundo después, el niño **B** reacciona y comienza a alejarse de él con una aceleración de $a_B = 3[m/s^2]$, pero comete la ingenuidad de hacerlo sobre la misma dirección de lanzamiento de la bola. El niño **A** tiene la bola de nieve a 1m desde el suelo, decide lanzarla inmediatamente a una velocidad v_0 y a un ángulo de 30º (con respecto al eje +X) cuando observa al niño **B** moverse. a) Qué valor debe tener la velocidad v_0 para que logre impactar la bola de nieve (**BN**) en el espaldar del niño **B** ubicado a 0.5m del suelo?, b) La altura máxima que alcanzó la bola en su trayectoria.

(Resp a) $v_{0BN} = 18{,}15\left[\frac{m}{s}\right]$; b) $y_{máx.\ BN} = 5{,}19[m]$)

[51] Una niña **A** tiene un platillo volador **PV** en sus manos a 0.5[m] de sus pies. Ella se sitúa en la cima de un edificio de 17.5[m] de altura y lanza el platillo a una rapidez $v_0 = 20[m/s]$ con un ángulo de $+30°$ con respecto a la horizontal positiva. Un niño **B** ubicado en el suelo e inicialmente a una distancia de 15[m] desde los pies del edificio, observa cuando la niña lanza el platillo y va a la caza de él (alejándose del edificio) a una velocidad constante v_B y lo logra atrapar espectacularmente a 1m de altura antes de golpear el suelo. Bajo las anteriores circunstancias, ¿qué velocidad v_B debió tener el niño **B** para que lograse atrapar el platillo volador **PV** con éxito?

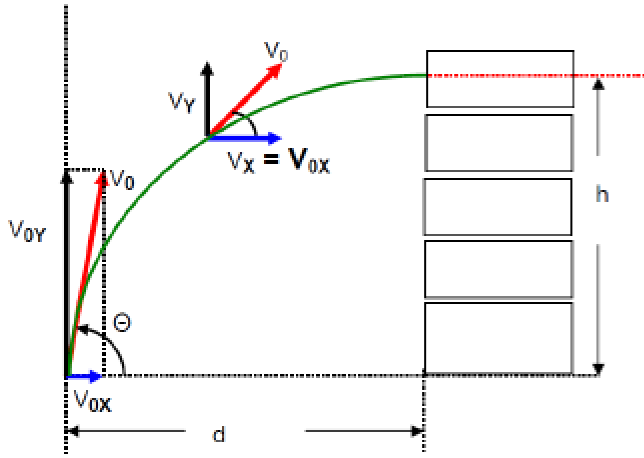
(Resp $v_B = 12{,}54[m/s]$)

[52] En un juego de béisbol, el jugador **L** (Lanzador) y el jugador **B** (Bateador) están ubicados en sus respectivas posiciones a una distancia de separación entre ellos de 10[m]. El jugador **L** tiene la bola a 1.5[m] desde el suelo y la lanza a una velocidad suficiente como para que la bola en ese tramo tienda a ir horizontalmente en la dirección negativa del eje X hacia el jugador **B**, (luego, la interacción gravitacional en éste movimiento es despreciable). Sucesivamente, el bateador **B** logra golpear la bola y ella sale en definitiva con una velocidad de 25[m/s] y a un ángulo de $+45°$ con respecto al eje X positivo. Inmediatamente, el jardinero central **J**, ubicado sobre la misma dirección de lanzamiento de la bola y una distancia de 12[m] del jugador **L** sobre la misma línea que conecta a los jugadores **L** y **B,** 1 segundo después, decide ir a la caza de la bola corriendo a una velocidad v_J (alejándose del jugador **L**) y logra atraparla espectacularmente a 0.5[m] antes de que chocase contra el suelo. Bajo las anteriores circunstancias, hallar la velocidad del jardinero v_J. (Sugerencia: ubique su sistema de coordenadas en la planta de los pies del jugador **B**).

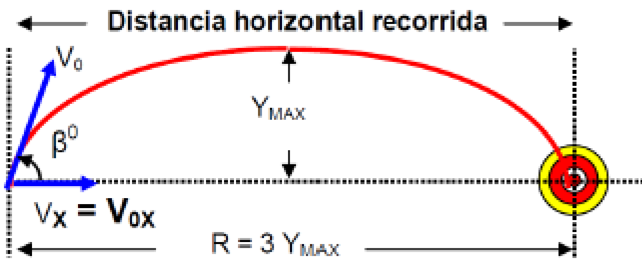
(Resp $v_J = 16{,}07[m/s]$)

[53] Un bombero a una distancia d en metros de un edificio en llamas dirige un chorro de agua de una manguera a un ángulo θ sobre la horizontal, así como se muestra en la figura. Si la velocidad inicial de la corriente es v_0, demuestre que la altura a la cual incide el agua en el edificio es:

$$h = \frac{v_0^2 \mathrm{d} \sin(2\theta) - g d^2}{2 v_0^2 \cos^2 \theta}$$



[54] Un proyectil se dispara de tal forma que su alcance horizontal es igual a tres veces su altura máxima. Bajo un tratamiento algebraico, hallar el valor numérico de dicho ángulo de tiro. Sugerencia: en dependencia de la forma en que se ataque el ejercicio (movimiento parabólico simétrico), quizás sea útil la identidad trigonométrica $\sin 2\beta = 2 \sin \beta \cos \beta$.



(Resp $\beta = 53{,}13°$)

Éxitos y recuerden que se les aprecia y por ende se les exige, ánimo!!