Si el punto se mueve rectilíneamente, la aceleración normal $a_n = 0$ y la aceleración del punto es igual a su aceleración tangencial:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_\tau .$$

§ I.1.5. Movimiento de traslación y de rotación de un sólido

1°. Se llama *movimiento de traslación* de un sólido aquel, durante el cual cualquier recta asociada rígidamente a dicho sólido (por ejemplo, la recta *AB,* de la fig. 1.1.5) se traslada permaneciendo paralela a su dirección inicial *(A_0B_0).* Tienen movimiento de traslación con respecto a la Tierra, por ejemplo, la cabina de un ascensor, la cuchilla de un torno, la aguja de una brújula cuando su caja se desplaza en un plano horizontal, etc.

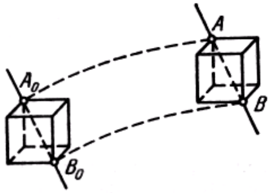

FIG. I.1.5.

Cuando un sólido se traslada, todos sus puntos se desplazan exactamente lo mismo: en un tiempo pequeño *dt,* los radios vectores de estos puntos varían en una misma magnitud *dr.* Respectivamente, en cada instante todos los puntos del sólido tienen la misma velocidad, igual a $d\mathbf{r}/dt$, y, por consiguiente, también son iguales sus aceleraciones. Por esto el estudio cinemático del movimiento de traslación de un sólido se reduce al estudio del movimiento de cualquiera de sus puntos. En la dinámica se estudia el movimiento del centro de inercia del sólido (1.2.3.3°). Todo cuerpo sólido que se mueve libremente en el espacio tiene tres grados de libertad de traslación (1.1.2.7°), que corresponden a sus traslaciones a lo largo de los tres ejes de coordenadas.

2°. El movimiento de un sólido durante el cual dos de sus puntos *A y B* permanecen fijos, se llama *rotación (o movimiento de rotación) del sólido alrededor de un eje fijo.* La recta en reposo AB recibe el nombre de *eje de rotación* del sólido. Al girar alrededor del eje fijo, todos los puntos del sólido describen circunferencias, cuyos centros se encuentran en el eje de rotación y cuyos planos son perpendiculares a él. Este tipo de movimiento, con respecto a la Tierra, lo efectúan, por ejemplo, los rotores de las turbinas, de los motores eléctricos y de los generadores sujetos a ella.

El sólido que gira alrededor de un eje fijo sólo tiene un grado de libertad (1.1.2.7°). Su posición en el espacio se determina totalmente por el valor φ del ángulo de rotación a partir de una posición determinada (inicial).

3°. Para caracterizar la rapidez y el sentido de la rotación del sólido alrededor del eje sirve la velocidad angular. Se llama *velocidad angular* el vector o, igual numéricamente a la primera derivada del ángulo de rotación φ, respecto del tiempo *t,* y dirigido a lo largo del eje de rotación fijo, de tal modo que desde su extremo se vea que el sólido gira en sentido contrario al de las agujas del reloj (fig. 1.1.6) *):

se llama *velocidad sectorial.*

§ I.1.4. Aceleración

1°. Para caracterizar la rapidez con que varía el vector velocidad de un punto se introduce en mecánica el concepto de aceleración. Se llama *aceleración media* de un punto en un intervalo de tiempo de *t* a $t + \Delta t$, el vector $\mathbf{a}_{\mathbf{med}}$ igual a la razón del incremento: $\Delta \mathbf{v}$ del vector velocidad del punto en este lapso, a la duración Δt de dicho intervalo:

$$\mathbf{a}_{\mathrm{med}} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} .$$

La rotación del cuerpo se dice que es *uniforme* si el valor numérico de su velocidad angular no varía con el tiempo: ω = const. En este caso el ángulo de rotación del sólido depende linealmente del tiempo: $\varphi = \omega t$.

4°. Un punto arbitrario M de un sólido que gira alrededor de un eje fijo OZ con la velocidad angular ω, describe una circunferencia de radio p con centro en el punto O' (fig. 1.1.7). La velocidad v del punto *M,* a diferencia de la velocidad angular del sólido, se llama frecuentemente *velocidad lineal.* Esta velocidad tiene dirección perpendicular al eje de rotación (es decir, al vector ω) y al radio vector ρ trazado al punto M desde el centro de la circunferencia O', e igual a su producto vectorial:

$$\mathbf{v} = [\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\rho}] := [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}] \quad \text{y} \quad v = \omega\rho.$$

Aquí $\mathbf{r} = OO' + \rho$ es el radio vector del punto M trazado desde el punto O del eje de rotación tomado como origen de coordenadas.

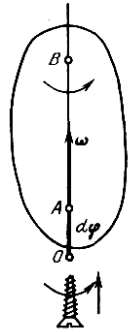

FIG. I.1.6.

5°. Se llama *período de rotación* el intervalo de tiempo T durante el cual el sólido, girando uniformemente con la velocidad (o, da una vuelta completa alrededor del eje de rotación, es decir, gira un ángulo $\varphi = 2\pi$): $T = 2\pi/\omega$

La frecuencia de rotación $n = 1/T = \omega/2\pi$ indica el número de vueltas (revoluciones) que da el sólido en la unidad de tiempo, cuando la rotación es uniforme y la velocidad angular es ω.

6°. El movimiento de un sólido en el cual uno de sus puntos permanece fijo, se denomina *rotación del sólido alrededor de un punto fijo.* Por lo general, este punto se toma como origen de coordenadas del sistema de referencia en reposo. En la rotación alrededor de un punto fijo todos los puntos del cuerpo se mueven por superficies de esferas concéntricas cuyos centros se hallan en el punto fijo. Este movimiento del sólido se puede considerar en cada instante como rotación alrededor de cierto eje que pasa por el punto fijo y recibe el nombre de *eje instantáneo de rotación.* En el caso general, la posición del eje instantáneo de rotación varía tanto con respecto a un sistema de referencia fijo, como con respecto a un sistema de referencia solidario del sistema que gira.

La velocidad de un punto en un instante t es igual al límite de la velocidad media v_{med} cuando la duración del intervalo Δt disminuye ilimitadamente

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \mathbf{v}_{med}.$$

El vector **v**, velocidad del punto, está dirigido según la tangente a la trayectoria en el sentido del movimiento, lo mismo que el vector $d\mathbf{r} = \mathbf{v}\, dt$ de una pequeña traslación del punto en un intervalo de tiempo muy pequeño *dt.*

El espacio *ds* recorrido por el punto en un tiempo *dt* es igual al módulo del vector traslación: $ds = |dr|$. Por esto el módulo del vector velocidad del punto es igual a la primera derivada del espacio recorrido respecto del tiempo:

$$v = |\mathbf{v}| = \frac{ds}{dt}.$$

3°. La descomposición del vector v según la base de un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares tiene la forma:

$$\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}.$$

La proyección de la velocidad del punto sobre los ejes de coordenadas es igual a las primeras derivadas respecto del tiempo de las correspondientes coordenadas del punto:

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt},$$

y el módulo del vector velocidad

$$v = |\mathbf{v}| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}.$$

4°. Si el movimiento del punto es rectilíneo, la dirección de su vector velocidad permanece invariable. Se dice que el movimiento del punto es *uniforme* si el módulo de su velocidad no varía con el tiempo: $v = ds/dt$ = const. Cuando el movimiento del punto es uniforme, el espacio s recorrido por él depende linealmente del tiempo: $s = vt$ (con la condición de que $t_0 = 0$, véase 1.1.2.5°).

Si el módulo de la velocidad del punto aumenta con el tiempo ($dv/dt > 0$), el movimiento se llama *acelerado, y* si disminuye ($dv/dt < 0$), se denomina *retardado.*

5°. Se da el nombre de *velocidad absoluta media del movimiento variado* de un punto en un tramo determinado de su trayectoria, a la magnitud escalar v_{med} igual a la razón de la longitud Δs de este tramo de trayectoria, al tiempo Δt que tarda el punto en recorrerlo:

$$v_{med} = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

donde $\mathbf{a}_{rot} = [\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{r}]$ es la *aceleración circular* o *de rotación* del punto y $\mathbf{a}_{axíp} = [\boldsymbol{\omega}[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]]$ es su *aceleración axípeta* y está dirigida hacia el eje de rotación instantáneo.

Si el sólido gira alrededor de un eje fijo *OZ* (fig. 1.1.7), la aceleración circular del punto *M* coincide con su aceleración tangencial $\mathbf{a}_\tau$ (1.1.4.5°), y la aceleración axípeta, con la aceleración normal $\mathbf{a}_n$ (1.1.4.6°):

$$\mathbf{a}_\tau = [\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{r}] = [\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\rho}], \qquad \mathbf{a}_n = -\,\omega^2\boldsymbol{\rho}.$$

9°. Todo movimiento complejo de un sólido se puede descomponer en dos movimientos simples: uno de traslación, con la velocidad $\mathbf{v}_A$ de cierto punto arbitrario *A* del sólido, y otro de rotación alrededor de un eje instantáneo que pase por dicho punto. La velocidad angular ω no depende del punto *A* que se elija. La velocidad de un punto arbitrario *M* del sólido

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_A + [\boldsymbol{\omega}\,(\mathbf{r} - \mathbf{r}_A)],$$

donde **r** y $\mathbf{r}_A$ son, respectivamente, los radios vectores de los puntos *M y A.*

En la dinámica del sólido suele ser conveniente considerar el movimiento complejo del cuerpo como la composición de dos movimientos simultáneos: uno de traslación con la velocidad del centro de inercia (1.2.3.3°) y otro de rotación alrededor de dicho centro. El caso más simple de movimiento complej o de un sólido es el *movimiento plano* o *planoparalelo,* en el cual todos los puntos del sólido se mueven en planos paralelos. Este movimiento lo efectúa, por ejemplo, un cilindro circular homogéneo que ruede por un plano inclinado. En el movimiento plano no varia la dirección del eje instantáneo de rotación del sólido alrededor de punto *A,* y los vectores ω y v_A son perpendiculares entre sí.

$$x = x(t), \quad y = y\,(t) \quad \text{y} \quad z = z\,(t),$$

definen la variación de las coordenadas del punto con el tiempo.

Estas ecuaciones se llaman *ecuaciones cinemáticas del movimiento del punto.* Son equivalentes a la ecuación vectorial del movimiento del punto: r = r *(t).*

3°. La línea que describe en el espacio un punto en movimiento se llama *trayectoria* de dicho punto. Las ecuaciones cinemáticas del movimiento del punto dan la ecuación de su trayectoria en forma paramétrica (el parámetro es el tiempo *t).* En dependencia de la forma de la trayectoria, el movimiento del punto puede ser *rectilíneo* o *curvilíneo.* El movimiento del punto se dice que es *plano,* si su trayectoria se encuentra total mente en un plano.

El movimiento mecánico de un cuerpo es relativo, es decir, su carácter y, en particular, la forma de las trayectorias de los puntos de dicho cuerpo dependen del sistema de referencia que se elija.

4°. En el caso general, la trayectoria de un punto material no es plana, sino una curva espacial. Para-esta curva se introduce el concepto de plano osculador. Se llama *plano osculador* en un punto arbitrario *M* de una curva, la posición límite del plano que pasa por tres puntos cualesquiera de la curva cuando estos tres puntos sé aproximan ilimitadamente al punto *M.* Recibe el nombre de *círculo osculador* en un punto *M* de una curva, el límite de la circunferencia que pasa por tres puntos de la curva considerada cuando estos tres puntos se aproximan ilimitadamente al punto *M.* El círculo osculador se encuentraen el plano osculador. El centro del círculo osculador y su radio se llaman respectivamente *centro de curvatura* y *radio de curvatura* de la curva correspondiente en el punto *M.* La recta que une el punto *M* con el centro de curvatura se llama *normal principal* a la curva en el punto *M.* La tangente a la curva en el punto *M* es perpendicular a la normal principal en este punto y también se encuentra en el plano osculador.

5°. El *espacio recorrido* por un punto es la suma de las longitudes de todos los tramos de la trayectoria recorridos por este punto en el intervalo de tiempo que se considere. El instante $t = t_0$ antes del cual el movimiento no se estudia, se llama *instante inicial,* y la posición del punto en este instante (punto *A* en la fig. 1.1.2), *posición inicial.* En virtud del modo arbitrario en que se elige el punto de referencia del tiempo, se suele suponer que $t_0 = 0$. El espacio *s* recorrido por el punto desde su posición inicial es una función escalar del tiempo: $s = s\ (t)$ y, como se ve por la misma definición, el espacio recorrido por el punto no puede ser una magnitud negativa. Si el punto se mueve por un arco de trayectoria *AB* (fig. 1.1.2) siempre en la misma dirección y en un instante *t* se encuentra en el punto *M,* entonces $s\,(t) = \smile\! AM$. En cambio, si el punto se mueve por la trayectoria de un modo más complejo, por ejemplo, en el instante $t_1 < t$ se traslada de *A* a *B* y después, moviéndose en sentido contrario, en el instante í retorna al punto *M,* será $s\,(t) = \smile\! AB + \smile\! BM$.

6°. Se llama *vector traslación* de un punto en un intervalo de tiempo entre t = fj y t = í$_2$, el vector trazado desde la posición del punto en el instante í$_t$ a su posición en el instante í$_2$. Este vector es igual al incremento del radio vector del punto durante el espacio de tiempo considerado,

$$\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}\,(t_2) - \mathbf{r}\,(t_1).$$

Capítulo I.1. Cinemática

§ I.1.1. Movimiento mecánico. Objeto de la mecánica

1°. La forma más simple de movimiento que hay en la naturaleza es el *movimiento mecánico,* que consiste en la variación de la posición recíproca de los cuerpos o de sus partes en el espacio en el transcurso del tiempo. La parte de la física que se ocupa del estudio de las leyes del movimiento mecánico se llama *mecánica.* En un sentido más estrecho de la. palabra, se suele entender por mecánica la m*ecánica clásica,* en la cual se estudian los movimientos de los cuerpos macroscópicos que se efectúan con velocidades muchísimo menores que la velocidad de la luz en el vacío. La base de la mecánica clásica son las leyes de Newton. Por esto también suele dársele el nombre de *mecánica newtoniana.* Las leyes del movimiento de los cuerpos con velocidades próximas a la de a luz en el vacío son objeto del estudio de la *mecánica relativista* (1.5.1.1°), y las leyes del movimiento de las micropartículas (por ejemplo, de los electrones en los átomos, moléculas, cristales, etc.) lo son de *la mecánica cuántica* (VI. 1.1.1°).

2°. La mecánica clásica tiene tres partes principales: estática, cinemática y dinámica. En la *estática* se estudian las leyes de la composición de las fuerzas y las condiciones de equilibrio de los cuerpos. En la cinemática se da la descripción matemática de todos los tipos posibles de movimiento mecánico sin relacionarla con! las causas que determinan cada tipo concreto de movimiento. En la *dinámica* se analiza la influencia de las interacciones entre los cuerpos sobre su movimiento mecánico.

3°. Las propiedades mecánicas de los cuerpos se determinan por su naturaleza química, estructura interna y estado, cuyo estudio no es objeto de la mecánica, sino de otras partes de la física. Por esto, para describir los cuerpos móviles reales de acuerdo con las condiciones de cada problema concreto, se utilizan en la mecánica diversos modelos simplificados: el punto material, el cuerpo rígido o sólido invariable, el cuerpo perfectamente elástico, el cuerpo plástico o absolutamente inelástico, etc.

Se llama *punto material* un cuerpo cuya forma y dimensiones carecen de importancia en las condiciones del problema dado. Por ejemplo, el movimiento de un buque de un punto a otro se puede considerar en primera aproximación como movimiento de un punto material. Pero en el caso en que sea necesario tener en cuenta un «detalle» de este movimiento, como el balanceo del barco cuando el mar está agitado, el buque debe considerarse como cuerpo extenso de forma determinada. En la literatura, en vez de «punto material» suele llamarse simplemente «punto».
Cualquier cuerpo extenso o sistema de cuerpos de este tipo que formen un *sistema mecánico* que se haya de investigar puede considerarse como un *sistema de puntos materiales.* Para esto todos los cuerpos del sistema deben dividirse mentalmente en un número de partes tan grande, que las dimensiones de cada una de ellas sean despreciables por su pequeñez en comparación con las dimensiones de los mismos cuerpos.

4°. Se da el nombre de *cuerpo rígido* o *sólido invariable* a aquél, cuyas deformaciones pueden despreciarse en las condiciones de un problema dado. La distancia entre dos puntos cualesquiera de un cuerpo rígido no varía sean cuales fueran las acciones que se ejerzan sobre él. El cuerpo rígido se puede considerar como un sistema de puntos materiales rígidamente unidos entre sí.