2°. *Aceleración* (o *aceleración instantánea)* de un punto es la magnitud vectorial a igual a la primera derivada respecto del tiempo de la velocidad v del punto considerado o, lo que es lo mismo a la segunda derivada respecto del tiempo del radio vector, **r** de dicho punto:

$$\mathbf{a}=\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\ .$$

La aceleración del punto en un instante *t* es igual al límite de la velocidad media $\mathbf{a}_{med}$ cuando la duración del intervalo Δt disminuye ilimitadamente:

$$\mathbf{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\mathbf{a}_{med}.$$

3°. Descomposición del vector a según la base de un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares:

$$\mathbf{a}=a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}+a_z\mathbf{k}.$$

Las proyecciones de la aceleración sobre los ejes de coordenadas son iguales a las primeras derivadas respecto del tiempo de las correspondientes proyecciones de la velocidad o, lo que es lo mismo, a las segundas derivadas respecto del tiempo de las correspondientes coordenadas del punto:

$$a_x=\frac{dv_x}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2},\quad a_y=\frac{dv_y}{dt}=\frac{d^2y}{dt^2},\quad a_z=\frac{dv_z}{dt}=\frac{d^2z}{dt^2}\ .$$

El módulo del vector aceleración

$$a=|\mathbf{a}|=\sqrt{\left(\frac{dv_x}{dt}\right)^2+\left(\frac{dv_y}{dt}\right)^2+\left(\frac{dv_z}{dt}\right)^2}=$$
$$=\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}.$$

4°. El vector aceleración del punto se encuentra en el plano sculador (1.1.2.4°) que pasa por el punto considerado *M* de la trayectoria, y está dirigido hacia la parte cóncava de la misma, ***BC*** (fig. 1.1.4). En este plano el vector aceleración a se puede descomponer en las dos componentes perpendiculares entre sí:

$$\mathbf{a}=\mathbf{a}_\tau+\mathbf{a}_n.$$

5°. La componente a_τ se llama *aceleración tangencial* del punto y está dirigida según la tangente a la trayectoria del punto

$$\mathbf{a}_\tau=\frac{dv}{dt}\boldsymbol{\tau}\quad \text{y}\quad a_\tau=\frac{dv}{dt},$$

donde $\boldsymbol{\tau}=\mathbf{v}/v$ es el vector tangencial unidad trazado por el punto *M* de la trayectoria en la dirección de la velocidad **v** del punto, y a_τ es la proyección de la aceleración tangencial sobre la dirección del vector v. La aceleración tangencial caracteriza la rapidez con que varía el módulo del vector velocidad del punto.

FIG. I.1.4.

Los vectores $\mathbf{a}_\tau$ y **v** coinciden por su dirección, es decir, $a_\tau>0$, cuando el movimiento del punto es acelerado (I.1.3.4°); los vectores $\mathbf{a}_t$ y v tienen la misma dirección y sentios opuestos, o sea, $\mathbf{a}_t<0$, cuando el movimiento del punto es retardado, y $\mathbf{a}_t=0$, cuando su movimiento es uniforme. Si $\mathbf{a}_t$ = const y diferente de cero, el movimiento se llama *uniformemente variado.* Cuando el movimiento es uniforme, el módulo de la velocidad del punto depende linealmente del tiempo:

$$v=v_0+a_\tau t,$$

donde $v_0=v\,(0)$ es el módulo de la velocidad inicial, es decir, de la velocidad en el instante inicial $t=0$. Si a_t = const > 0, el movimiento del punto se dice que es *uniformemente acelerado,* y si a_t = const < 0, el movimiento del punto se denomina *uniformemente retardado.*

6°. La componente a_n de la aceleración a se llama *aceleración normal* del punto. Está dirigida según la normal principal a la trayectoria en el punto *M* considerado y hacia el centro de curvatura de la trayectoria (1.1.2.4°). Por esto a_n suele llamarse también *aceleración centrípeta* del punto. La aceleración normal

$$\mathbf{a}_n=\frac{v^2}{R}\mathbf{n},$$

donde n es el vector unidad de la normal principal, y *R* es el radio de curvatura de la trayectoria. La aceleración normal caracteriza la rapidez con que varía la dirección del vector velocidad del punto.

Esta velocidad es igual al módulo del vector velocidad de un movimiento uniforme tal, que en recorrer este mismo espacio tarde el punto el mismo tiempo que con el movimiento variado.

Cuando el movimiento del punto es curvilíneo $|\Delta \mathbf{r}| < \Delta \mathbf{s}$. Por esto, en el caso general, la velocidad absoluta media de v_{med} no es igual al módulo de la velocidad media del punto $\mathbf{v}_{med}$ en este mismo tramo de trayectoria (1.1.3.1°): $v_{med} \geq |\mathbf{v}_{med}|$, donde el signo igual corresponde a la parte rectilínea de la trayectoria.

6°. En el caso del movimiento plano de un punto *M* (1.1.2.3°) conviene frecuentemente utilizar las coordenadas polares *r y* φ, donde r es la distancia desde el polo *O* hasta el punto *M,* y φ, el ángulo polar medido desde el eje polar *OA* (fig. 1.1.3). La velocidad v del punto *M se* puede descomponer en dos componentes perpendiculares entre sí: la *velocidad radial* $\mathbf{v}_r$ y la *velocidad tangencial* $\mathbf{v}_\varphi$:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_\varphi,$$

siendo

$$\mathbf{v}_r = \frac{1}{r}\frac{dr}{dt}\mathbf{r} \quad \text{y} \quad \mathbf{v}_\varphi = \frac{d\varphi}{dt}[\mathbf{kr}].$$

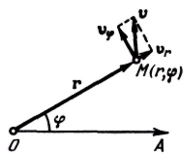

FIG. I.1.3.

Aquí r es el radio vector polar de punto *M*, y *k,* el vector unitario dirigido perpendicularmente al plano del movimiento del punto, de forma que desde su extremo se vea efectuarse la rotación del vector r, al aumentar el ángulo polar φ, en sentido contrario al de las agujas del reloj.

El módulo del vector velocidad v de un punto *M* que realiza un movimiento plano:

$$v = \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(r\frac{d\varphi}{dt}\right)^2}$$

Durante un tiempo pequeño *dt* el radio vector polar **r** del punto que realiza el movimiento plano barre un sector circular de área $dS = \frac{1}{2} r^2 \, d\varphi$. Por esto la magnitud

$$\sigma = \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{2} r v_\varphi$$

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{\omega} = \frac{d\boldsymbol{\varphi}}{dt}.$$

Aquí $d\varphi$ es el vector rotación elemental (pequeña) del sólido durante el tiempo *dt,* dirigido a lo largo del eje de rotación de acuerdo también con la regla del tornillo (fig. 1.1.6).
Los vectores axiales $d\varphi$ y ω no tienen puntos de aplicación determinados: pueden tomarse desde cualquier punto del eje de rotación. En la fig. 1.1.6 están trazados desde cierto punto *O* del eje de rotación fijo, el cual se toma al mismo tiempo como origen de coordenadas del sistema de referencia.

*) La dirección del vector ω puede determinarse también por la *regla del tornillo:* dicha dirección coincide con la del movimiento de avance de un tornillo roscado a derechas que se mueva junto con el sólido. Los vectores semejantes al ω, cuya dirección está relacionada con el sentido de una rotación y se invierte al pasar del sistema de coordenadas dextrórsum al sistema de coordenadas sinestrórsum, se llaman s*eudovectores* o *vectores axiales* (para diferenciarlos de los ordinarios o *vectores polares,* que no cambian de sentido cuando sé efectúa la transformación de coordenadas antedicha). Por ejemplo, el producto vectorial de dos vectores polares es un seudovector, mientras que el producto vectorial de un seudovector por un vector polar es un vector polar.

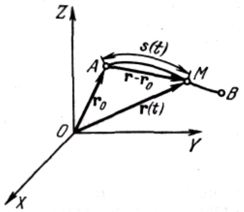

FIG. I.1.2.

El vector traslación siempre está dirigido a lo largo de la cuerda que une los extremos del tramo de la trayectoria correspondiente.
En la fig. 1.1.2 se muestra el vector traslación del punto en el intervalo de tiempo entre t_0 y t, igual a $r - r_0 = r(t) - r(t_0)$
El vector traslación del punto en el lapso de t a $t + \Delta t$ es igual a

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t) = \Delta x \cdot \mathbf{i} + \Delta y \cdot \mathbf{j} + \Delta z \cdot \mathbf{k},$$

donde Δx, Δy y Δz son los incrementos (variaciones) de las coordenadas del punto durante el intervalo de tiempo considerado.

7°. Un punto material, moviéndose libremente en el espacio, sólo puede efectuar tres *movimientos independientes,* es decir, tales que cada uno de ellos no puede representarse en forma de combinación de los demás. En efecto, el movimiento del punto a lo largo de cada uno de los ejes del sistema de coordenadas rectangulares cartesianas no puede realizarse a expensas de su movimiento a lo largo de los otros dos ejes. El número de movimientos independientes que puede efectuar un sistema mecánico se llama *número de grados de libertad* de este sistema. Así, pues, un punto material libre tiene tres grados de libertad.

§ I.1.3. Velocidad

1°. Para caracterizar la rapidez del movimiento de los cuerpos se introduce en mecánica el concepto de velocidad. Se llama *velocidad media* de un punto en movimiento en un intervalo de tiempo de t a $t + \Delta t$, el vector $\mathbf{v}_{med}$ igual a la razón del incremento $\Delta \mathbf{r}$ del radio vector del punto durante este intervalo de tiempo, a su duración Δt:

$$\mathbf{v}_{med} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}.$$

El vector $\mathbf{v}_{med}$ tiene la misma dirección que $\Delta \mathbf{r}$, es decir, a lo largo de la cuerda que une los extremos del tramo de trayectoria correspondiente.
2°. *Velocidad (o velocidad instantánea)* de un punto es una magnitud vectorial v igual a la primera derivada respecto del tiempo del radio vector r del punto que se considera:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}.$$

La velocidad v de un punto arbitrario M del sólido es:

$$\mathbf{v} = [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}] \text{ y } v = \omega\rho.$$

Aquí $\boldsymbol{\omega} = d\boldsymbol{\varphi}/dt$ es la velocidad angular del cuerpo, dirigida a lo largo del eje instantáneo de rotación, lo mismo que el vector $d\boldsymbol{\varphi}$ de la rotación elemental del sólido durante el pequeño tiempo dt; **r** es el radio vector trazado al punto M desde el punto fijo O, alrededor del cual gira el sólido, y p es la distancia desde el punto M hasta el eje instantáneo de rotación. El sólido, en este caso, puede realizar tres movimientos independientes, a saber: girar alrededor de cada uno de los tres ejes perpendiculares entre sí que pasan por el punto fijo O. Por con siguiente, tiene tres grados de libertad (1.1.2.7°).

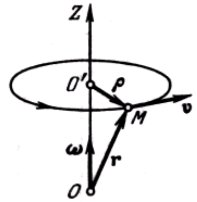

FIG. I.1.7.

7°. Para caracterizar la rapidez con que varía el vector velocidad angular del sólido durante la rotación no uniforme del cuerpo alrededor de un eje fijo o de un punto fijo, se introduce el *vector aceleración angular* e del sólido, igual a la primera derivada de su velocidad angular ω respecto del tiempo t,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}.$$

Si el sólido gira alrededor de un eje fijo, el vector e está dirigido a lo largo de este eje, en el mismo sentido que ω cuando la rotación es acelerada $(d\omega/dt > 0)$, y en sentido contrario si la rotación es retardada $(d\omega/dt < 0)$. La proyección de la aceleración angular sobre el eje de rotación fijo OZ es igual a

$$\varepsilon_z = \frac{d\omega_z}{dt},$$

donde ε_z es la proyección sobre este mismo eje del vector ω.

8°. La aceleración a de un punto arbitrario M del sólido que gira alrededor de un punto fijo O ó de un eje fijo que pasa por dicho punto suele llamarse, para diferenciarla de la aceleración angular del sólido, *aceleración lineal.* Esta aceleración

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}] = \mathbf{a}_{rot} + \mathbf{a}_{axip},$$

Se llama *cuerpo perfectamente elástico* aquel, cuya deformación se subordina a la ley de Hooke (VII. 1.3.4°). Una vez que cesa la acción del esfuerzo exterior, este cuerpo recupera totalmente sus dimensiones iniciales y su forma.

Se dice que un cuerpo es *absolutamente inelástico* o *plástico* si, cuando cese la acción de la fuerza exterior, conserva totalmente el estado deformado provocado por dicha acción.

§ I.1.2. Sistema de referencia. Trayectoria, espacio recorrido y vector traslación de un punto

1°. La posición de un cuerpo en el espacio sólo puede determinarse con respecto a otros cuerpos. Por ejemplo, tiene sentido hablar de la posición de los planetas con respecto al Sol; de un avión o de una motonave con respecto a la Tierra, pero no puede indicarse su posición en el espacio «en general», sin relacionarla con cualquier cuerpo concreto. El cuerpo rígido, con el cual está asociado invariablemente un sistema de coordenadas provisto de relojes, que se utiliza para determinar la posición en el espacio de los cuerpos y partículas que se estudian en diferentes instantes, se llama *sistema de referencia.* A veces se llama sistema de referencia al mismo sistema de coordenadas provisto de relojes, y el cuerpo rígido del cual es solidario se denomina *cuerpo de referencia.* En cada problema concreto el sistema de referencia se elige de tal modo que simplifique lo más posible su solución. En física se utilizan generalmente sistemas de referencia inerciales (1.2.1.2°).

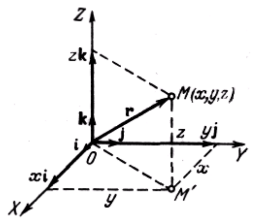

FIG. I.1.1.

2°. El sistema de coordenadas que más se usa es el cartesiano rectangular (fig. I.l.l)/Cuya *base ortonormalizada* está constituida por tres vectores'unitarios por el módulo y recíprocamente ortogonales i, j y k, trazados desde el origen de coordenadas *O.* La posición de un punto arbitrario *M* se caracteriza por el radio vector r que une el origen de coordenadas *O* con el punto *M.* El vector r se puede descomponer según la base i, j, k:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$

donde *xi, yj y zk* son las componentes del vector r a lo largo de los ejes de coordenadas. Los coeficientes de descomposición *x, y,* son las coordenadas cartesianas del punto *M* y también, en virtud de la ortogonalidad de los vectores de la base, las proyecciones del radio vector r sobre los correspondientes ejes de coordenadas.

El movimiento de un punto material estará completamente determinado si se dan las tres funciones continuas y unívocas del tiempo *t:*