cuerpo; v_i la velocidad de las partículas que se separan, *después de la separación,* $\left(\text{si } \frac{dm}{dt} < 0\right)$, o de las que se adhieren, después *de unirse* $\left(\text{si } \frac{dm}{dt} > 0\right)$.

2°. El segundo término del segundo miembro de la ecuación de Mescherski es la fuerza adicional que actúa sobre el cuerpo de masa variable. Esta fuerza se llama *fuerza reactiva:*

$$\mathbf{F_r} = (\mathbf{v_1} - \mathbf{v})\frac{dm}{dt} = \mathbf{u}\frac{dm}{dt},$$

donde $\mathbf{u} = \mathbf{v_i} - \mathbf{v}$ es la velocidad relativa de las partículas que se separan o que se adhieren, o sea, sus velocidades con respecto al sistema de referencia que se traslada junto con el cuerpo.

La fuerza reactiva caracteriza la acción mecánica que ejercen sobre el cuerpo las partículas que se separan o adhieren a él (por ejemplo, la acción sobre el cohete del chorro de gases que sale de él).

3°. Ecuación del movimiento de un cohete en ausencia de fuerzas externas:

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{u}\frac{dm}{dt}.$$

Si la velocidad inicial del cohete era igual a cero, éste se moverá rectilíneamente en dirección inversa a la velocidad relativa u del chorro de gases a la salida de la tobera del motor. En este caso

$$m\frac{dv}{dt} = -u\frac{dm}{dt}$$

y cuando u = const la relación entre la velocidad del cohete y su masa se expresa por la *fórmula de Tsiolkovski*

$$v = u \ln \frac{m_0}{m},$$

siendo m_0 la masa inicial (de despegue) del cohete.

4°. La velocidad máxima que puede desarrollar un cohete en ausencia de fuerzas externas recibe el nombre de *velocidad característica.* Esta velocidad la alcanza en el instante en que termina de funcionar el motor por agotamiento total de las reservas de combustible y oxidante que llevaba a bordo el cohete,

$$v_{\text{máx}} = u \ln \frac{m_0}{m_0 - m_p},$$

donde m_D es la masa inicial de combustible y oxidante (propulsante).

La influencia de la atracción de la Tierra y de la resistencia del aire ocasionan una considerable disminución de la velocidad máxima que realmente adquiere el cohete durante el proceso de funcionamiento del motor, en comparación con su velocidad característica.

5°. *La velocidad característica de un cohete compuesto* (de varias etapas) es

$$v_{\text{máx}} = \sum_{i=1}^{n} u_i \ln \frac{m_{0i}}{m_{0i} - m_{pi}},$$

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}_C.$$

§ I.2.4. Segunda ley de Newton

1°. La ley fundamental de la dinámica del punto material es la segunda ley de Newton, que trata de cómo varía el movimiento mecánico de un punto material bajo la acción de las fuerzas a él aplicadas. *La segunda ley de Newton* dice: la velocidad con que varía el impulso **p** de un punto material es igual a la fuerza **F** que actúa sobre él, o sea,

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F} \quad \text{o} \quad \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \mathbf{F},$$

donde m y v son, respectivamente, la masa y la velocidad del punto material.

Si sobre un punto material actúan simultáneamente varias fuerzas, en la segunda ley de Newton debe entenderse por fuerza **F** la suma geométrica de todas las fuerzas actuantes, tanto activas como reacciones de liguadura (1.2.2.3°), es decir, la fuerza resultante (1.2.2.2°).

2°. La magnitud vectorial **F***dt* recibe el nombre de *impulso* elemental *de la fuerza* **F** en un pequeño intervalo de tiempo *dt* de su actuación. El impulso de la fuerza **F** en un intervalo finito de tiempo desde $t = t_1$ hasta $t = t_2$ es igual a la integral definida $\int_{t_1}^{t_2} F dt$ donde **F**, en el caso general, depende del tiempo.

De acuerdo con la segunda ley de Newton, la variación del impulso de un punto material es igual al impulso de la fuerza que actúa sobre él:

$$d\mathbf{p} = \mathbf{F}\,dt \quad \text{y} \quad \Delta\mathbf{p} = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\,dt,$$

donde $\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}(t_2)$ y $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}(t_1)$ son, respectivamente, los impulsos del punto material al final ($t = t_2$) y al principio ($t = t_1$) del intervalo de tiempo considerado.

3°. Como en la mecánica newtoniana la masa m del punto material no depende del estado de movimiento de éste, $dm/dt = 0$. Por lo que la expresión matemática de la segunda ley de Newton puede representarse también en la forma

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m},$$

donde $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt = d^2\mathbf{r}/dt^2$ es la aceleración del punto material; r, su radio vector. El enunciado correspondiente de la *segunda ley de Newton dice:* la aceleración de un punto material coincide en dirección con la fuerza que actúa sobre él y es igual a la razón de esta fuerza a la masa del punto material.

Las aceleraciones tangencial y normal de un punto material (1.1.4.4°—1.1.4.6°) se determinan por las respectivas componentes de la fuerza **F**:

$$\mathbf{a}_\tau = \frac{\mathbf{F}_\tau}{m}, \quad a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{F_\tau}{m}$$

El impulso de un sistema $\mathbf{p}\mathbf{v} = m\mathbf{v}_C$, donde m es la masa de todo el sistema y $\mathbf{v}_C$, la velocidad de su centro de inercia (1.2.3.4°). Por esto, de la ley de conservación del impulso se deduce que cualesquiera que sean los procesos que tengan lugar en un sistema cerrado, la velocidad de su centro de inercia no varía: $\mathbf{v}_C$ = const.

3°. Si el sistema no es cerrado, pero la acción que sobre él ejercen las fuerzas externas es tal, que su vector resultante es idénticamente igual a cero ($\mathbf{F}^{ext} = 0$), de acuerdo con las leyes de Newton (1.2.5.3°) el impulso del sistema no varía con el tiempo**:** $\mathbf{p}$ = const.

Por lo general $\mathbf{F}^{ext}$ es diferente de cero y $\mathbf{p}$ = const. Pero si la proyección del vector resultante de las fuerzas externas sobre cualquier eje fijo es idénticamente igual a cero, la proyección sobre este mismo eje del vector impulso del sistema no varía con el tiempo. Así, pues, p_x = const a condición de que $\mathbf{F}^{ext} = 0$. Por ejemplo, si sobre el sistema no actúa más fuerza externa que la gravedad, la componente horizontal del impulso del sistema, perpendicular a la dirección de esta fuerza, no varía.

4°. En algunos procesos (por ejemplo, de choque o disparo) los impulsos de las partes del sistema sufren grandes variaciones durante intervalos de tiempo relativamente cortos. Esto se debe a que en el sistema surgen fuerzas internas de interacción entre las partes del mismo, de poca duración pero de magnitud muy considerable, en comparación con las cuales todas las fuerzas externas que actúan permanentemente sobre el sistema (por ejemplo, la gravedad) resultan pequeñas. En los procesos de este tipo se puede despreciar, por lo general, la acción que ejercen sobre el sistema las fuerzas externas, o sea, se puede considerar aproximadamente que el impulso de todo el sistema en conjunto no varía durante el proceso examinado.

§ I.2.8. Transformaciones de Galileo. Principio mecánico de la relatividad

1°. Se llaman *transformaciones de Galileo* las transformaciones de coordenadas y del tiempo que se utilizan en la mecánica newtoniana al pasar de un sistema inercial de referencia *K (x, y, z, t)* a otro *K' (x', y', z', t')* animado con respecto a *K* de Movimiento de traslación y velocidad constante V. Las transformaciones de Galileo se basan en los axiomas sobre el carácter absoluto de los intervalos de tiempo y de las longitudes. El primer axioma afirma que la marcha del tiempo (y, respectivamente, el intervalo de tiempo entre dos sucesos cualesquiera) es igual en todos los sistemas inerciales de referencia. De acuerdo con el segundo axioma las dimensiones de los cuerpos no dependen de la velocidad con que se mueven respecto al sistema de referencia.

Si los ejes homólogos de las coordenadas cartesianas de los sistemas de referencia inerciales *K y K'* están trazados paralelamente entre sí de dos en dos y si en el instante inicial ($t = t' = 0$), los orígenes de coordenadas *O y O'* coinciden (fig. 1.2.2.), las transformaciones de Galileo tienen la forma

$$x' = x - V_x t, \quad y' = y - V_y t, \quad z' = z - V_z t \quad \text{y} \quad t' = t,$$

o bien

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{V}t \quad \text{y} \quad t' = t,$$

donde *x, y,* z y *x', y', z'* son las coordenadas del punto *M* en los sistemas de referencia *K* (en el instante *t*) y *K'* (en el instante $t' = t$); **r** y **r'** son los radios vectores del punto *M* en los mismos sistemas de referencia, y V_x, V_y, V_z son las proyecciones de la velocidad **V** del sistema *K'* sobre los ejes de coordenadas del sistema *K*.

Si el cuerpo es rígido, la acción de la fuerza sobre él no varía si el punto de aplicación de ésta se traslada a lo largo de su línea de acción dentro de los límites del cuerpo. En otras palabras, las fuerzas aplicadas a un cuerpo rígido se pueden considerar como vectores deslizantes.

3°. Un cuerpo se llama *libre* si sobre su posición y movimiento en el espacio no se imponen ningunas limitaciones. Por ejemplo, un avión en vuelo es un cuerpo libre, lo mismo que un submarino navegando sumergido. En la mayoría de los casos nos encontramos con cuerpos no libres: sobre sus posibles posiciones y movimientos se imponen unas u otras limitaciones que en mecánica reciben el nombre de *ligaduras.* Por ejemplo, una bolita colgada de un hilo inextensible no puede alejarse del punto de suspensión a una distancia mayor que la longitud del hilo; un tranvía sólo puede moverse a lo largo de los raíles. Las ligaduras se efectúan en virtud de la acción que sobre el cuerpo considerado ejercen otros cuerpos que están sujetos o en contacto con él (por ejemplo, el hilo atado a la bolita, los raíles del tranvía, etc.).

Al estudiar el comportamiento de los cuerpos o sistemas de cuerpos no libres se utiliza en la mecánica el *principio de liberación:* un cuerpo (o sistema de cuerpos) que no sea libre se puede considerar como libre si la acción que sobre él ejercen los cuerpos que efectúan las ligaduras se sustituyen por las fuerzas respectivas. Estas fuerzas se llaman *reacciones de ligadura, y* todas las demás fuerzas que actúan sobre el cuerpo se denominan *fuerzas activas.* Así, el movimiento de la bolita colgada del hilo puede considerarse como el de una bola libre sobre la cual, además de todas las fuerzas activas aplicadas a ella (por ejemplo, la gravedad), actúa la reacción del hilo. A diferencia de las fuerzas activas, que en cada problema concreto deben darse, las reacciones de ligadura se desconocen de antemano. Tienen que ser determinadas durante la solución del problema. Sus valores deben ser tales, que, bajo la acción común de las fuerzas activas y las reacciones de ligadura, el cuerpo «liberado» realice un movimiento que esté plenamente de acuerdo con las restricciones impuestas por las ligaduras al cuerpo no libre considerado. Entre las reacciones de ligadura y las fuerzas activas no existen otras diferencias.

4°. Los cuerpos que no entran en la composición del sistema mecánico que se considera se llaman *cuerpos externos.* Las fuerzas que sobre el sistema ejercen los cuerpos externos se denominan *fuerzas externas.* Respectivamente, se da el nombre de *fuerzas internas* a las de interacción entre las partes del sistema en cuestión.

Un sistema mecánico se llama *cerrado* o *aislado* si no interacciona con cuerpos externos. Ninguno de los cuerpos de un sistema cerrado sufre la acción de las fuerzas externas.

§ I.2.3. Masa. Impulso

1°. En la mecánica clásica (newtoniana) se llama *masa de un punto material* la magnitud escalar positiva que sirve de medida a la inercia de dicho punto. Bajo la acción de una fuerza la velocidad del punto material no varía inmediatamente, sino *poco a poco,* es decir, el punto adquiere una aceleración, *finita* por su magnitud, tanto menor cuanto mayor es la masa del punto material. Para comparar las masas m_1 y m_2 de dos puntos materiales basta medir los módulos a_1 y a_2 de las aceleraciones adquiridas por estos puntos bajo la acción de una misma fuerza: $m_2/m_1 = a_1/a_2$. Por lo general la masa de un cuerpo se determina pesándolo en una balanza de brazos.

En la mecánica clásica (newtoniana) se considera que:

a) la masa de un punto material no depende de su estado de movimiento y es una característica invariable del punto;

b) la masa es una magnitud aditiva, o sea, la masa de un sistema (por ejemplo, de un cuerpo) es igual a la suma de las masas de todos los puntos materiales que entran en la composición de este sistema; la masa de un sistema cerrado (1.2.2.4°) permanece invariable

4°. Las ecuaciones que expresan las leyes de Newton (1.2.4.3°) y (1.2.5.1°) son invariantes respecto de las transformaciones de Galieo, o sea, no cambian de forma al transformar las coordenadas y el tiempo de un sistema inercial de referencia *(K)* a otro *(K')*:

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} \quad \text{y} \quad \mathbf{F}_{ki} = -\mathbf{F}_{ik}$$
$$m'\mathbf{a}' = \mathbf{F}' \quad \text{y} \quad \mathbf{F}'_{ki} = -\mathbf{F}'_{ik} \quad .$$

siendo $m' = m$ la masa del punto material considerado, igual en todos los sistemas de referencia.

De esta forma, en la mecánica clásica es válido el *principio mecánico de la relatividad (o principio de la relatividad de Galileo):* las leyes de la mecánica son iguales en todos los sistemas inerciales de referencia. Esto quiere decir, que en distintos sistemas inerciales de referencia todos los procesos mecánicos, si las condiciones son las mismas, se desarrollan igualmente. Por lo tanto, por medio de experimentos mecánicos cualesquiera, efectuados en un sistema cerrado de cuerpos, es imposible establecer si dicho sistema está en reposo o si se mueve uniforme y rectilíneamente (con relación a cualquier sistema inercial de referencia).

El principio mecánico de la relatividad pone de manifiesto que en la mecánica todos los sistemas inerciales de referencia son totalmente equivalentes. Entre ellos es imposible destacar uno especial, o sistema inercial de referencia «principal», con respecto al cual el movimiento de los cuerpos pudiera considerarse como su «movimiento absoluto».

5°. La generalización del principio de la relatividad a todos los fenómenos físicos fue realizada por Albert Einstein en la teoría especial de la relatividad (1.5.1.2°). Al hacerlo, se puso de manifiesto que las coordenadas y el tiempo en distintos sistemas inerciales de referencia se relacionan mediante las transformaciones de Lorentz (1.5.3.2°), y no de Galileo. Pero cuando las velocidades del movimientos relativo de los sistemas de referencia son pequeñas (en comparación con la velocidad de la luz en el vacío), las transformaciones de Lorentz se convierten en transformaciones de Galileo.

Capítulo I.2. Leyes de Newton

§ I.2.1. Primera ley de Newton. Sistemas inerciales de referencia

1°. Como *primera ley de la dinámica* tomó Newton la ley, establecida ya por Galileo, según la cual un punto material conserva su estado de reposo o de movimiento rectilíneo y uniforme mientras la acción de otros cuerpos no le obligue a salir de dicho estado.

La primera ley de Newton indica que el estado de reposo o de movimiento rectilíneo y uniforme no requiere para su conservación ninguna acción externa. En esto se pone de manifiesto una propiedad dinámica particular de los cuerpos que se llama *inercia.* Por esto a la primera ley de Newton se le da también el nombre de *ley* o *principio de la inercia,* y al movimiento de un cuerpo en ausencia de acciones por parte de otros cuerpos, el *de movimiento por inercia.*

2°. El movimiento mecánico es relativo: para un mismo cuerpo su carácter puede ser diferente en distintos sistemas de referencia (1.1.2.1°) que se muevan el uno con respecto al otro. Por ejemplo, un cosmonauta que se halle a bordo de un satélite artificial de la Tierra estará en reposo en el sistema de referencia solidario del satélite. Al mismo tiempo, con respecto a la Tierra se moverá junto con dicho satélite siguiendo una órbita elíptica, es decir, su movimiento no será uniforme ni rectilíneo. Es natural por esto que la primera ley de Newton deba cumplirse no en cualquier sistema de referencia. Por ejemplo, una esfera que se encuentre en el suelo liso del camarote de un barco que marche con movimiento uniforme y rectilíneo, puede comenzar a moverse por el suelo sin que sobre ella actúe ningún cuerpo externo. Para esto es suficiente que la velocidad del barco empiece a variar. El sistema de referencia con respecto al cual un punto material, libre de acciones externas, está en reposo o se mueve uniforme y rectilíneamente, se llama *sistema de referencia inercial.* El contenido de la primera ley de Newton se reduce en esencia a dos afirmaciones: primera, que todos los cuerpos tienen la propiedad de la inercia y, segunda, que existen sistemas de referencia inerciales.

3°. Dos sistemas de referencia inerciales cualesquiera sólo pueden moverse el uno con respecto al otro con movimiento de traslación uniforme y rectilíneo. Se ha establecido experimentalmente que en la práctica es inercial el *sistema heliocéntrico de referencia* cuyo origen de coordenadas se halla en el centro de inercia (1.2.3.3°) del Sistema Solar (aproximadamente en el centro del Sol) y cuyos ejes están trazados en las direcciones de tres estrellas lejanas elegidas, por ejemplo, de tal manera, que los ejes de coordenadas sean perpendiculares entre sí. *El sistema de referencia del laboratorio,* cuyos ejes de coordenadas están asociados rígidamente a la Tierra no es inercial, a causa principalmente de la rotación diaria de la Tierra. No obstante, la Tierra gira tan despacio, que la aceleración normal máxima (1.1.4.6) de los puntos de su superficie en la rotación diaria no excede de 0,034 m/s^2. Por esto, en la mayoría de los problemas prácticos, el sistema de referencia del laboratorio se puede considerar inercial aproximadamente.

4°. Los sistemas inerciales de referencia desempeñan un papel particular no sólo en la mecánica, sino también en todas las demás partes de la física. Esto se debe a que, según el principio de la relatividad de Einstein (1.5.1.2°), la expresión matemática de cualquier ley física debe tener la misma forma en todos los sistemas inerciales de referencia. Por esto, en adelante utilizaremos, sin advertirlo cada vez, únicamente sistemas inerciales de referencia. Las leyes del movimiento de un punto material con respecto a un sistema de referencia no inercial se estudianen el capítulo 1.7.