y

$$a_n = \frac{F_n}{m}, \quad a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{F_n}{m},$$

siendo v el módulo del vector velocidad del punto material, y R el radio de curvatura de su trayectoria. La fuerza $\mathbf{F}_n$ que imprime al punto material la aceleración normal está dirigida hacia el centro de curvatura de la trayectoria del punto (1.1.2.4°), por lo que se llama *fuerza centrípeta.*

4°. Si sobre un punto material actúan simultáneamente varias fuerzas $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots, \mathbf{F}_n$, su aceleración

$$\mathbf{a} = \frac{1}{m}\sum_{l=1}^{n} \mathbf{F}_l = \sum_{l=1}^{n} \mathbf{a}_l,$$

donde $\mathbf{a}_l = \mathbf{F}_l/m$. Por consiguiente, cada una de las fuerzas que actúan simultáneamente sobre el punto material le comunica la misma aceleración que si las demás fuerzas no existieran *(principio de la independencia de la acción de las fuerzas).*

Se llama *ecuación diferencial del movimiento de un punto material* la ecuación

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F} = \sum_{l=1}^{n} \mathbf{F}_l.$$

En proyecciones sobre los ejes de un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares, esta ecuación tiene la forma

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = F_y, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = F_z$$

donde x, y, z son las coordenadas del punto en movimiento.

§ 1.2.5. Tercera ley de Newton. Movimiento del centro de inercia

1°. La influencia mecánica de unos cuerpos sobre otros tiene carácter de *interacción.* Sobre esto la *tercera ley de Newton* dos puntos materiales actúan entre sí con fuerzas numéricamente iguales y dirigidas en sentidos opuestos a lo largo de la recta que los une. Si $\mathbf{F}_{ik}$ es la fuerza que el punto material k-ésimo ejerce sobre el i-ésimo, y $\mathbf{F}_{ki}$, la fuerza que el punto material i-ésimo ejerce sobre el .k-ésimo, según la tercera ley de Newton,

$$\mathbf{F}_{ki} = -\mathbf{F}_{ik}.$$

Las fuerzas $\mathbf{F}_{ik}$ *y* $\mathbf{F}_{ki}$ están aplicadas a distintos puntos materiales y sólo pueden equilibrarse en aquellos casos en que estos puntos pertenezcan a un mismo cuerpo rígido.

2°. La tercera ley de Newton es un complemento importante de las leyes primera y segunda. Permite pasar de la dinámica de los puntos materiales aislados a la dinámica de un sistema mecánico arbitrario (sistema de puntos materiales). De la tercera ley de Newton se deduce que en cualquier sistema mecánico la suma geométrica de todas las fuerzas internas (1.2.2.4°) es igual a cero:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}_{ik} = 0,$$

siendo n el número de puntos materiales que entran en la composición del sistema, y $\mathbf{F}_{ii} = 0$.

El vector F^{ext}, igual a la suma geométrica de todas las fuerzas externas (1.2.2.4°) que actúan sobre el sistema, recibe el nombre de *vector resultante de las fuerzas externas:*

$$\mathbf{F}^{ext} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i^{ext},$$

donde $\mathbf{F}_i^{ext}$ es la resultante de las fuerzas externas aplicadas al i-ésimo punto material.

3°. De las leyes segunda y tercera de Newton se deduce que la primera derivada, respecto del tiempo t, del impulso p de un sistema mecánico (1.2.3.4°) es igual al vector resultante de todas las fuerzas externas aplicadas al sistema,

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}^{ext}.$$

Esta ecuación expresa la *ley de la variación del impulso del sistema.*

Como $\mathbf{p} = m\mathbf{v}_C$, siendo m la masa del sistema y $\mathbf{v}_C$ la velocidad de su centro de inercia, la *ley del movimiento del centro de inercia* de un sistema mecánico tiene la forma

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}_C) = \mathbf{F}^{ext} \quad \text{o} \quad m\mathbf{a}_C = \mathbf{F}^{ext},$$

donde $\mathbf{a}_C = d\mathbf{v}_C/dt$ es la aceleración del centro de inercia. De este modo, el centro de inercia de un sistema mecánico se mueve como un punto material cuya masa es igual a la de todo el sistema y sobre el cual actúa una fuerza igual al vector resultante de las fuerzas externas aplicadas a dicho sistema.

Si el sistema considerado es un sólido animado de movimiento de traslación (1.1.5.1°), las velocidades v_i de todos los puntos del sólido y de su centro de inercia $\mathbf{v}_C$ son iguales entre sí y a la velocidad v del sólido. La aceleración propia o intrínseca del cuerpo $\mathbf{a} = \mathbf{a}_c$, y la *ecuación fundamental de la dinámica del movimiento de traslación del sólido* tiene la forma

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}^{ext}.$$

§ I.2.6. Movimiento de un cuerpo de masa variable

1°. En la mecánica newtoniana la masa del cuerpo puede variar únicamente como resultado de que se separen o se adhieran a él partículas de substancia. Un ejemplo de cuerpo de este tipo es un cohete. durante el vuelo de este su masa va disminuyendo poco a poco, ya que los productos gaseosos de la combustión del propulsante en el motor del cohete son expulsados por la tobera.

La ecuación del movimiento de traslación de un cuerpo de masa variable (ecuación de Mescherski) es:

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}^{ext} + (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v})\frac{dm}{dt},$$

donde m y v son, respectivamente, la masa y la velocidad del cuerpo en el instante que se considera; F^{ext}, el vector resultante de las fuerzas externas (1.2.5.2°) que actúan sobre el

cualesquiera que sean los procesos que tengan lugar en este sistema *(ley de conservación de la masa).*
Estos postulados de la mecánica newtoniana fueron revisados y precisados por la mecánica relativista (1.5.6.1°, 1.5.6.2°, 1.5.7.3° y 1.5.7.6°).

2°. Se da el nombre de densidad p de un cuerpo en un punto dado *M* del mismo, a la razón de la masa *dm* del elemento pequeño de cuerpo que incluye al punto *M,* a la magnitud *dV* del volumen de este elemento:

$$\rho=\frac{dm}{dV}\ .$$

Las dimensiones del elemento considerado deben ser tan pequeñas, que la variación de la densidad dentro de sus límites se pueda despreciar. Por otra parte, deben ser mucho mayores que las distancias intermoleculares.

Se dice que un cuerpo es *homogéneo* si en todos sus puntos la densidad es la misma. La masa de un cuerpo homogéneo es igual al producto de su densidad por su volumen: $m = \rho V$

La masa de un cuerpo no homogéneo

$$m=\int\limits_{(V)} \rho\, dV,$$

donde ρ es función de las coordenadas, y la integral se extiende a todo el volumen del cuerpo. La *densidad media* $\langle\rho\rangle$ de un cuerpo no homogéneo es la razón de su masa a su volumen: $\langle\rho\rangle = m/V$.

3°. Se llama *centro de inercia o centro de masa de un sistema* de puntos materiales un punto *C* cuyo radio vector re es igual a

$$\mathbf{r}_C=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i\mathbf{r}_i,$$

donde m_i y $\mathbf{r}_i$ son, respectivamente, la masa y el radio vector del í-ésimo punto material; *n,* el número total de puntos materiales que hay en el sistema, y

$$m = \sum_{i=1}^{n} m_i$$

es la masa de todo el sistema.

La velocidad del centro de inercia

$$\mathbf{v}_C=\frac{d\mathbf{r}_C}{dt}=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i\mathbf{v}_i.$$

4°. La magnitud vectorial p_i, igual al producto de la masa m_i de un punto material por su velocidad v_i, se llama *impulso* o *cantidad de movimiento* de dicho punto *material.* Se da el nombre de *impulso de un sistema* de puntos materiales a un vector **p** igual a la suma geométrica de los impulsos de todos los puntos
materiales que componen el sistema:

$$\mathbf{p}=\sum_{i=1}^{n} \mathbf{p}_i.$$

El impulso de un sistema es igual al producto de la masa de todo el sistema por la velocidad de su centro de inercia

siendo *n* el número total de etapas del cohete, m_{pi} la masa de combustible y oxidante destinada al funcionamiento del motor de la i-ésima etapa, u_i la velocidad relativa de salida de los gases por la tobera del motor de la i-ésima etapa, m_{oi} la masa de despegue de la parte del cohete compuesto formada por todas las etapas del mismo desde la i-ésima hasta la n-ésima. El aumento de la velocidad característica del cohete compuesto, en comparación con el de una etapa de igual masa de despegue y las mismas reservas de combustible y oxidante, se debe a la disminución adicional de la masa del cohete por la sucesiva separación de él de las etapas* primera, segunda y siguientes una vez consumido todo el combustible existente en cada una.

§ I.2.7. Ley de conservación del impulso

1°. *Ley de conservación del impulso:* el impulso **p** de un sistema cerrado no varía con el tiempo, es decir,

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt}\equiv 0 \quad \text{y} \quad \mathbf{p}=\text{const}.$$

A diferencia de las leyes de Newton, la ley de conservación del impulso es válida no sólo dentro del marco de la mecánica clásica. Esta ley es una de las más fundamentales de la física, ya que está relacionada con una propiedad determinada de la simetría del espacio, su homogeneidad. La *homogeneidad del espacio manifiesta* en que las propiedades físicas de un sistema cerrado y las leyes de su movimiento no dependen de la elección que se haga de la posición del origen de coordenadas del sistema inercial de referencia, es decir, no varían cuando el sistema cerrado en conjunto se traslada paralelamente en el espacio. De acuerdo con las ideas modernas, pueden tener impulso no sólo las partículas y los cuerpos, sino también los campos. Por ejemplo, la luz ejerce presión sobre la superficie del cuerpo que la refleja lo absorbe precisamente porque el campo electromagnético de la onda luminosa tiene impulso.

2°. Con arreglo a los sistemas que describe la mecánica clásica (newtoniana), la ley de conservación del impulso se puede considerar como una consecuencia de las leyes de Newton. Para un sistema mecánico cerrado el vector resultante de las fuerzas externas $F^{ext} = 0$, y de (1.2.5.3°) se sigue la ley de conservación del impulso

$$\mathbf{p}=\sum_{i=1}^{n} m_i v_i=\text{const},$$

siendo m_i y v_i la masa y la velocidad del í-ésimo punto material del sistema compuesto por *n* puntos.

Respectivamente tampoco varían las proyecciones del impulso del sistema cerrado sobre los ejes de coordenadas cartesianas del sistema inercial de referencia:

$$p_x=\sum_{i=1}^{n} m_i v_{ix}=\text{const},$$

$$p_y=\sum_{i=1}^{n} m_i v_{iy}=\text{const},$$

$$p_z=\sum_{i=1}^{n} m_i v_{iz}=\text{const}.$$

§ I.2.2. Fuerza

1°. Se llama *fuerza* la magnitud vectorial que sirve de medida de la acción mecánica que sobre el cuerpo considerado ejercen otros cuerpos. La interacción mecánica puede efectuarse tanto entre cuerpos en contacto directo (por ejemplo, en el rozamiento o cuando los cuerpos presionan entre si), como entre cuerpos separados unos de otros. La forma particular de la materia que liga las partículas de substancia en sistemas únicos y que transmite con velocidad finita la acción de unas partículas sobre otras, se llama *campo físico o* simplemente *campo.* La interacción entre cuerpos separados se realiza por medio de los campos gravitatorios y electromagnéticos creados por ellos (por ejemplo, la atracción de los planetas hacia e 1 Sol, la interacción de los cuerpos cargados eléctricamente, de los conductores con corriente, etc.). La acción mecánica que sobre un cuerpo dado ejercen otros cuerpos se manifiesta de dos formas. Primera, es capaz de provocar la variación del estado de movimiento mecánico del cuerpo considerado y, segunda, su deformación. Estas dos manifestaciones de la acción de la fuerza pueden servir de base para medir las fuerzas. Por ejemplo, la medición de las fuerzas por medio del dinamómetro de resorte se basa en la ley de Hooke (VII.1.3.4^0) para la tracción longitudinal.

Aplicando el concepto de fuerza, en la mecánica suele hablarse de movimiento y de deformación del cuerpo por la acción[6] las fuerzas aplicadas a él. Como es natural, se sobrentiende que a cada fuerza le corresponde siempre algún cuerpo que actúa sobre el considerado con dicha fuerza.

Una fuerza F está totalmente definida si se dan su módulo, su dirección en el espacio y su punto de aplicación. La recta, a lo largo de la cual está dirigida la fuerza, se llama *directriz o línea de acción de la fuerza.* El campo que actúa sobre un punto material con la fuerza F, se llama *campo estacionario* si no varía con el tiempo í, es decir, si en cualquier punto del carneo la fuerza F no depende explícitamente del tiempo: $\partial\mathbf{F}/\partial t = 0$. Para que un campo sea estacionario es preciso que los cuerpos que lo crean estén en reposo con respecto al sistema de referencia inercial que se utiliza para estudiar el campo.

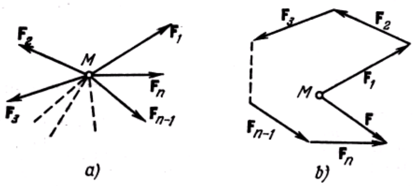

FIG. I.2.1.

2°. La acción simultánea de varias fuerzas $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots, \mathbf{F}_n$ (fig. 1.2.1,a) sobre un punto material *M* es equivalente a la acción de una sola fuerza, llamada *resultante,* igual a la suma geométrica de aquéllas

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i .$$

La resultante cierra el polígono de fuerzas $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots, \mathbf{F}_n$ (fig. 1.2.1. *b).*

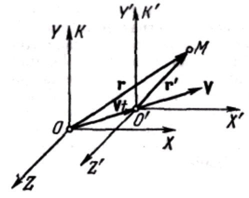

FIG. I.2.2.

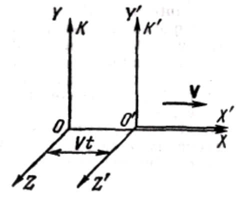

FIG. I.2.3.

De ordinario los ejes de coordenadas se trazan de manera que el sistema *K'* se mueva a lo largo del sentido positivo del eje *OX* (fig. 1.2.3). En este caso las transformaciones de Galileo tienen una forma más simple:

$$x' = x - Vt, \quad y' = y, \quad z' = z \ \text{ y } \ t = t'.$$

2°. De las transformaciones de Galileo se deduce la siguiente ley de transformación de la velocidad de un punto arbitrario *M* (fig. 1.2.2) al pasar de un sistema inercial de referencia *K* (velocidad del punto $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$) a otro *K'* (velocidad del mismo punto $\mathbf{v}' = d\mathbf{r}'/dt$):

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{V}.$$

Respectivamente se transforman también las proyecciones de la velocidad sobre los ejes de coordenadas:

$$v'_x = v_x - V_x, \quad v'_y = v_y - V_y, \quad v'_z = v_z - V_z.$$

En particular, cuando el sistema *K'* se mueve a lo largo del sentido positivo del eje *OX* (fig. 1.2.3)

$$v'_{x'} = v_x - V, \quad v'_{y'} = v_y, \quad v'_{z'} = v_z.$$

Las aceleraciones del punto *M* en los sistemas de referencia *K* ($\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$) y *K'* ($\mathbf{a}' = d\mathbf{v}'/dt$) son iguales: $\mathbf{a} = \mathbf{a}'$.

Así, pues, la aceleración de un punto material es independiente del sistema inercial de referencia que se elija, es decir, es invariante respecto de las transformaciones de Galileo.

3°. Las fuerzas de interacción de los puntos materiales dependen únicamente de sus posiciones mutuas y de la velocidad del movimiento relativo entre ellos. La posición mutua de dos

puntos cualesquiera 2 y 1 se caracteriza por un vector igual a la diferencia de los radios vectores de estos puntos, o sea, en el sistema *K* el vector $\mathbf{r}_{21} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ y en el sistema *K',* el vector $\mathbf{r}'_{21} = \mathbf{r}'_2 - \mathbf{r}'_1$. De las transformaciones de Galileo se sigue que $\mathbf{r}'_{21} = \mathbf{r}_{21}$. Por esto las distancias entre los puntos 1 y 2 en los sistemas *K y K'* son iguales:

$$r'_{21} = r_{21} \ \text{ ó } \ (x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2 = \\ = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2.$$

La velocidad del movimiento del punto 2 con relación al punto 1 es igual a la diferencia entre las velocidades de estos puntos: $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$ (en el sistema *K)* y $\mathbf{v}'_2 - \mathbf{v}'_1$ (en el sistema *K').* De las transformaciones de Galileo se deduce que $\mathbf{v}'_2 - \mathbf{v}'_1 = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$.

Por lo tanto, la posición mutua y la velocidad del movimiento relativo de dos puntos materiales cualesquiera no depende del sistema inercial de referencia que se elija, es decir, son invariantes respecto de las transformaciones de Galileo. Respectivamente, son también invariantes respecto de dichas transformaciones las fuerzas que actúan sobre el punto material: $\mathbf{F}' = \mathbf{F}$.