4°. En todos los sistemas mecánicos reales actúan fuerzas de resistencia y de rozamiento, como consecuencia de lo cual todos estos sistemas son no conservativos. Pero en algunos casos se pueden considerar aproximadamente como conservativos y aplicarles la ley de conservación de la energía mecánica. Esto es posible si en el proceso considerado el trabajo $A_{n\cdot p}$ de todas las fuerzas no potenciales que actúan sobre el sistema son despreciales por su pequenez en comparación con la energía mecánica W del sistema, es decir, si $\left|\frac{A_{n\cdot p}}{W}\right| \ll 1$, de manera que

$$\left|\frac{\Delta W}{W}\right| \ll 1$$

donde $\Delta W = A_{n\cdot p}$ es la variación de la energía mecánica del sistema.

5°. Se llama estado *de equilibrio mecánico de un sistema* el estado del cual dicho sistema sólo puede ser sacado como resultado de la acción de una fuerza exterior. En este estado todos los puntos materiales del sistema se hallan en reposo, ya que la energía cinética del sistema es igual a cero. El estado de equilibrio mecánico se dice que es *estable* si una pequeña acción exterior sobre el sistema sólo produce una pequeña variación de su estado. Al ocurrir esto surgen en el sistema fuerzas que tienden a restituirlo a su estado de equilibrio. El estado de equilibrio mecánico se llama *inestable* si el sistema, por pequeña que sea la acción externa que se ejerza sobre él, sale de dicho estado y no retorna más a él. En este caso surgen fuerzas que hacen que el sistema se siga desviando del estado de equilibrio.

La ley de conservación de la energía mecánica permite indicar las condiciones de equilibrio de los sistemas conservativos: en los estados de equilibrio estable la energía potencial del sistema tiene mínimos, y en los estados de equilibrio inestable, máximos.

6°. Basándose en la ley de conservación de la energía mecánica se puede esclarecer cuál es la región de las posibles configuraciones del sistema conservativo (1.3.3.1°). La energía cinética del sistema $W_c \geq 0$. Por esto, si se da el valor W de la energía mecánica del sistema, este último sólo puede encontrarse en los estados que satisfacen la condición $W_p \leq W$. La fig. 1.3.5 corresponde al caso más simple, en que un punto material efectúa un movimiento unidimensional a lo largo del eje *OX* en un campo externo de potencial estacionario. La energía potencial del punto es función solamente de una coordenada x, es decir, $W_p = W_p(x)$. La gráfica de esta dependencia, representada en la fig. 1.3.5, se llama *curva de potencial.* Si se fija el valor W de la energía mecánica del punto material que muestra la fig. 1.3.5, dicho punto se puede mover permaneciendo en una de las tres regiones siguientes: $x \leq x_1$ (región *I*), $x_2 \leq x \leq x_3$ (región *III*) y $x \geq x_4$ (región *V*).

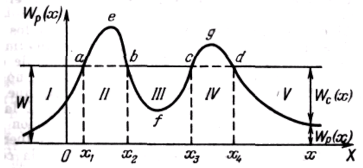

FIG. I.3.5.

Éstas se encuentran separadas entre sí por las regiones *II y IV de* las llamadas *barreras de potencial aeb* y *cgd,* dentro de cuyas fronteras no puede hallarse el punto. En las fronteras de las barreras de potencial (puntos *a, b, c* y *d)* el punto material invierte el sentido de su movimiento, con la particularidad de que en la región *I* el punto puede alejarse indefinidamente hacia la izquierda desde la frontera o de la barrera, y en la región *V,*

la energía potencial del sistema en un estado arbitrario es igual al trabajo que realizan todas las fuerzas potenciales que actúan sobre él al pasar del estado que se considera al estado correspondiente a la configuración de referencia.

3°. Ejemplo 1. *Energía potencial de un punto material en un campo de fuerzas homogéneo*. Supongamos que **F** es la fuerza que ejerce el campo sobre el punto y que está dirigida a lo largo del eje *OZ, es* decir, $\mathbf{F} = F_z\mathbf{k}$, donde **k** es el versor del eje *OZ,* y la proyección F_z de la fuerza F sobre el eje *OZ* no depende de las coordenadas del punto. Entonces

$$dW_p = -\mathbf{F}\,d\mathbf{r} = -F_z dz \quad \text{y} \quad W_p(z) = -F_z z + W_p(0),$$

donde $W_p(0)$ es el valor de la energía potencial del punto material al nivel de z = 0.

En particular, la energía potencial de un punto material de masa m que se encuentra en el campo homogéneo de la gravedad cerca de la superficie de la Tierra (si el eje *OZ* está dirigido verticalmente hacia arriba y $F_z = -mg$, siendo g la aceleración de caída libre) es igual a

$$W_p(z) = mgz + W_p(0).$$

4°. Ejemplo 2. *Energía potencial de un punto material en un campo de fuerzas centrales.* En un *campo de potencial de fuerzas centrales* sobre el punto material actúan unas fuerzas **F** que en todas partes están dirigidas a lo largo de rectas que pasan por un mismo punto fijo, llamado *centro de fuerzas,* y que sólo dependen de la distancia r hasta dicho centro:

$$\mathbf{F} = F_r(r)\frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Aquí **r** es el radio vector trazado desde el centro de fuerzas hasta el punto considerado del campo, y $F_r(r)$ es la proyección de la fuerza **F** sobre la dirección del vector **r**, que sólo depende de la distancia r. Si el punto material es atraído hacia el centro de fuerzas, $F_r(r) = -|\mathbf{F}| < 0$, si por el contrario, el punto es repelido por dicho centro, $F_r(r) = |\mathbf{F}| > 0$. El trabajo elemental de la fuerza **F**

$$\delta A = \mathbf{F}\,d\mathbf{r} = F_r(r)\,dr.$$

La energía potencial del punto material

$$W_p(r) = \int_r^{\infty} F_r(r)\,dr + W_p(\infty).$$

Por lo general, como punto de referencia de la energía potencial se toma la energía de un punto material que se halla a una distancia infinita del centro de fuerzas, es decir, se supone que $W_p(\infty) = 0$:

$$W_p(r) = \int_r^{\infty} F_r(r)\,dr.$$

De ejemplos de campo de fuerzas central, en el cual la fuerza es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia hasta el centro de fuerzas $(F_r(r) \sim r^{-2})$, pueden servir los campos gravitatorios de un punto material y de una bola homogénea, el campo electrostático de una carga puntual, así como los de una esfera y una bola en las que, respectivamente, la carga esté repartida con uniformidad por la superficie y por el volumen.

5°. Ejemplo 3. *Energía potencial de un sistema de dos puntos materiales* entre los cuales actúan fuerzas centrales, es decir fuerzas que dependen de la distancia entre los puntos y están dirigidas a lo largo de la recta que los une entre sí.

Observación. En el caso de un choque absolutamente inelástico arbitrario que sea directo y central, esta fórmula permite hallar la velocidad del centro de inercia de los cuerpos que se unen al chocar. Pero como resultado de esta colisión se puede producir también una rotación del sistema alrededor de su centro de inercia, de acuerdo con la ley de conservación del momento del impulso (1.4.4.1°).

4°. La variación de la energía cinética de un sistema de dos cuerpos que se encuentran produciéndose un choque central, directo, absolutamente inelástico, es

$$\Delta W_c = \frac{m_1+m_2}{2}\mathbf{u}^2 - \frac{m_1}{2}\mathbf{v}_1^2 - \frac{m_2}{2}\mathbf{v}_2^2 =$$

$$= -\frac{m_1 m_2}{2(m_1+m_2)}(\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2)^2 < 0.$$

En particular, si el segundo cuerpo estaba en reposo antes del choque (por ejemplo, el pilote que se clava con el martinete o la pieza de forja que descansa en el yunque, la disminución relativa de la energía cinética del sistema, al producirse el noque central, directo, absolutamente inelástico será

$$-\frac{\Delta W_c}{W_{c_1}} = \frac{m_2}{m_1+m_2}.$$

El choque central, directo, absolutamente inelástico se utiliza en la técnica para cambiar la forma de los cuerpos (forja, estampado, remachado, etc.) o para desplazar cuerpos en un medio que ofrece gran resistencia (clavar clavos, pilotes, etc.). En el primer caso conviene que la relación — $\Delta W_c/W_{c1}$ se aproxime lo más posible a la unidad, es decir, es necesario que $m_2 \gg m_1$ (la masa de la pieza que se forja y del yunque debe ser muchísimo mayor que la masa del martillo). En el segundo caso, al contrario, hace falta que las pérdidas de energía cinética durante el golpe sean las menores posibles, o sea, que $m_1 \gg m_2$ (la masa del martillo debe ser mucho mayor que la del clavo que se desea clavar).

5°. El choque de dos cuerpos se llama *perfectamente elástico* si en él no varía la energía mecánica del sistema, es decir, si los cuerpos son perfectamente elásticos.

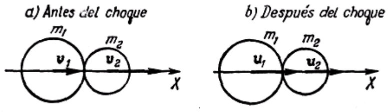

FIG. 1.3.6.

Ejemplo 1. *Choque directo, central, perfectamente elástico* de dos cuerpos (por ejemplo, de dos esferas) de masa m_1 *y* m_2 que antes de la colisión estaban animados de movimiento de traslación con las velocidades v_1 y v_2 a lo largo del eje *OX* (fig. 1.3.6, a) que pasa por sus centros de inercia. Las velocidades de los cuerpos después del choque u_x y u_2 (fig. 1.3.6., *b)* se pueden hallar partiendo de las leyes de conservación del impulso y de la energía mecánica:

$$m_1\mathbf{u}_1 + m_2\mathbf{u}_2 = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2,$$
$$m_1\mathbf{u}_1^2 + m_2\mathbf{u}_2^2 = m_1\mathbf{v}_1^2 + m_2\mathbf{v}_2^2.$$

Las velocidades $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ están dirigidas a lo largo del eje *OX,* y sus proyecciones sobre este eje son

$$u_{1x} = \frac{(m_1-m_2)\,v_{1x}+2m_2v_{2x}}{m_1+m_2}, \quad u_{2x} = \frac{2m_1v_{1x}+(m_2-m_1)\,v_{2x}}{m_1+m_2}.$$

$$W_c = \sum_{i=1}^{n}\frac{m_i\mathbf{v}_i^2}{2} = \sum_{i=1}^{n}\frac{m_i v_i^2}{2},$$

donde m_i y v_i son, respectivamente, la masa y la velocidad del *i*-ésimo punto del sistema.

La energía cinética de un cuerpo

$$W_c = \frac{1}{2}\int_{(V)}\rho\mathbf{v}^2\,dV = \frac{1}{2}\int_{(V)}\rho v^2\,dV,$$

en que v es la velocidad de los puntos de un pequeño elemento de volumen *dV* del cuerpo, cuya densidad es p y su masa $dm = \rho dV$. La integración se extiende a todo el volumen *V* del cuerpo. Si éste es rígido, tiene la masa *m* y está animado de movimiento de traslación con la velocidad v, su energía cinética $W_c = mv^2/2$. La energía cinética del cuerpo en rotación se estudia en 1.4.3.3° y 1.3.3.5°.

3°. La variación de la energía cinética de un sistema mecánico es igual a la suma algebraica de los trabajos de todas las fuerzas externas e internas que actúan sobre dicho sistema (1.2.2.4°),

$$dW_c = \delta A^{ext} + \delta A^{int}.$$

Por ejemplo, para un sistema compuesto por *n* puntos materiales

$$dW_c = \sum_{i=1}^{n}\mathbf{F}_i^{ext}\,d\mathbf{r}_i + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{F}_{ik}\,d\mathbf{r}_i,$$

donde $\mathbf{r}_i$ es el radio vector del *i*-ésimo punto; $\mathbf{F}^{ext}$, la resultante de las fuerzas externas que actúan sobre este punto, y $\mathbf{F}_{ii} = 0$.

Si el sistema es indeformable, el trabajo de las fuerzas internas

$$\delta A^{int} = 0 \quad \text{y} \quad dW_c = \delta A^{ext}.$$

Por ejemplo, la variación de la energía cinética de un cuerpo rígido animado de movimiento de traslación

$$dW_c = \mathbf{F}^{ext}d\mathbf{r},$$

siendo $\mathbf{F}^{ext}$ el vector resultante de las fuerzas externas (1.2.5.2°), y $d\mathbf{r}$, el vector desplazamiento elemental del cuerpo.

4°. La energía cinética de un sistema mecánico depende del sistema de referencia que se elija. Si en el sistema inercial de referencia *K* la energía cinética del sistema es W_c, y en el sistema de referencia *K',* animado de movimiento de traslación con la velocidad V respecto de *K,* es igual a W'_c, entonces

$$W_c = W'_c + \frac{mV^2}{2} + \mathbf{p}'\mathbf{V},$$

donde m es la masa del sistema; $\mathbf{p}' = m\mathbf{v}'_C$, el impulso del sistema en su movimiento con respecto al sistema de referencia *K';* $\mathbf{v}'_C$, la velocidad del centro de inercia del sistema con respecto a *K'.* Esta relación es válida tanto para $\mathbf{V}$ = const, es decir, cuando *K'* es un sistema inercial de referencia, como para $dV/dt \neq 0$.

En particular, si el sistema de referencia *K',* se desplaza con respecto a *K* con movimiento de traslación de velocidad $\mathbf{v}_C$ del centro de inercia del sistema, o sea, si $\mathbf{V} = \mathbf{v}'_C$, entonces $\mathbf{v}'_C = 0$ y

$$W_c = \frac{mV_C^2}{2} + W'_c.$$

la posición mutua de todos los puntos del sistema y al mismo tiempo, el trabajo de estas fuerzas al desplazarse el sistema desde una posición arbitraria a otra, no depende del procedimiento de traslación, sino que se define totalmente por las configuraciones inicial y final del sistema. De ejemplos de este tipo de fuerzas pueden servir las fuerzas de interacción electrostáticas y gravitatorias. *Un campo estacionario* (1.2.2.1°) se dice que es *potencial* si la fuerza **F** con que actúa sobre un punto material situado en él es potencial. Esto quiere decir que la fuerza **F** sólo depende de la posición del punto material en el campo y que el trabajo que realiza dicha fuerza **F** al trasladar el punto de una posición arbitraria *1* a otra *2* (fig. 1.3.2) a lo largo de cualesquiera dos trayectorias, por ejemplo, *Ia2* (trabajo A_{1a2}) y *1b2* (trabajo A_{1b2}) es el mismo:

$$A_{1a2}=A_{1b2}=\int_1^2 \mathbf{F}\,d\mathbf{r}.$$

Rectivamente, el trabajo de la fuerza potencial al trasladar punto de aplicación a lo largo de cualquier trayectoria *L* dada (por ejemplo, *1a2b1)* es nulo:

$$\oint_{(L)} \mathbf{F}\,d\mathbf{r}\equiv 0.$$

En el caso general, los cuerpos externos que crean el campo considerado pueden moverse con relación al sistema inercial de referencia, de manera que su campo no es estacionario, es decir, la fuerza **F** depende explícitamente del tiempo: $\partial\mathbf{F}/\partial t \not\equiv 0$ Un campo *no estacionarlo* es *potencial,* si el trabajo que realiza la fuerza **F** al trasladar *instantáneamente* su punto de aplicación a lo largo de cualquier trayectoria cerrada *L* es nulo:

$$\oint_{(L)} \mathbf{F}\,d\mathbf{r}\equiv 0.$$

Aquí **F** no sólo depende de las coordenadas del punto, sino también del tiempo, pero, al calcular esta integral, el tiempo debe considerarse como parámetro fijo.

7°. A las fuerzas no potenciales pertenecen las disipativas y las giroscópicas. Se llaman *fuerzas disipativas* aquellas cuyo trabajo total, cualesquiera que sean los desplazamientos del sistema cerrado, es siempre negativo. Así son, por ejemplo, las fuerzas de rozamiento por deslizamiento y las de resistencia al movimiento de los cuerpos en los líquidos y los gases.Las fuerzas disipativas, a diferencia de las potenciales, dependen no sólo de la posición mutua de los cuerpos que interaccionan, sino también de sus velocidades relativas.

Se dice que son *fuerzas giroscópicas* las que dependen de la velocidad del punto material sobre el cual actúan y están dirigidas perpendicularmente a esta velocidad. Un ejemplo de fuerza giroscópica es la fuerza de Lorentz (111.11.1.1°), que ejerce el campo magnético sobre una partícula con carga que se mueve en él. El trabajo de las fuerzas giroscópicas es siempre nulo, independientemente de cómo se desplace el punto material.

Un sistema mecánico (sistema de puntos materiales) se llama *conservativo,* si todas las fuerzas no potenciales que actúan sobre él no realizan trabajo, y todas las fuerzas potenciales externas son estacionarias. Los sistemas que no satisfacen las condiciones indicadas se dice que son *no conservativos.*

Capítulo I.3. Trabajo y energía mecánica

§ I.3.1. Energía, trabajo y potencia

1°. *La energía* es una magnitud física escalar que sirve de medida general a las distintas formas de movimiento de la materia que se estudian en la física. La energía de un sistema caracteriza cuantitativamente a éste con respecto a las posibles transformaciones del movimiento que pueden ocurrir en él. Estas transformaciones se producen en virtud de la interacción de las partes del sistema, tanto entre sí como con los cuerpos externos (medio exterior). Para analizar las formas cualitativamente distintas del movimiento y las interacciones que les corresponden, en física se introducen diversas formas de la energía: mecánica (I 3.4.1°), interna o intrínseca (II.2.1.2°), electromagnética (IV.4.2.1^0), nuclear (VIII.1.2.2°), etc.

2°. La variación del movimiento mecánico de un cuerpo es provocada por la acción de las fuerzas que sobre él ejercen otros cuerpos. Para describir cuantitativamente este proceso de intercambio de energía entre los cuerpos que interaccionan se utiliza en mecánica el concepto de trabajo de la fuerza aplicada al cuerpo que se considera. Se llama *trabajo elemental de una fuerza* F en un desplazamiento pequeño *dr,* la magnitud escalar

$$\delta A = \mathbf{F}\, d\mathbf{r} = \mathbf{F}\mathbf{v}dt.$$

donde r y v = *dr/dt* son, respectivamente, el radio vector y la velocidad del punto de aplicación de la fuerza, y *dt* es el pequeño intervalo de tiempo durante el cual la fuerza F realiza el trabajo δA (sobre el sentido de la designación δA véase 1.3.1.8°) En coordenadas cartesianas rectangulares $\delta A = F_x\, dx + F_y dy + F_z dz = (F_x v_x + F_y v_y + F_z v_z)dt,$ siendo *x, y, z* las coordenadas del punto de aplicación de la fuerza, y F_x, F_y, F_z y v_x, v_y, v_z, las proyecciones, sobre los ejes de coordenadas, de los vectores F y v.

3°. La expresión para el trabajo elemental también se puede representar de la forma

$$\delta A = F\, ds \cos \alpha = F_\tau ds,$$

en la que $ds = |\, dr\, |$ es la longitud elemental del espacio recorrido por el punto de aplicación de la fuerza durante el pequeño intervalo de tiempo *dt;* α, el ángulo entre los vectores **F** y d**r**, y $F_\tau = F \cos \alpha$, la proyección de la fuerza sobre la dirección del desplazamiento *dr.* Una fuerza normal a la trayectoria de su punto de aplicación no realiza trabajo. La fuerza **F** se llama *fuerza motriz* si $\mathbf{F}_\tau > 0$, de manera que $\delta A > 0$. En cambio, si $F_\tau < 0$ ($\delta A < 0$), la fuerza **F** recibe el nombre *de fuerza de frenado o de resistencia.*

4°. Si sobre un sistema mecánico actúan al mismo tiempo las fuerzas F_1, F_2, . . ., F_n, el trabajo δA realizado por ellas durante un pequeño intervalo de tiempo *dt* será igual a la suma algebraica de los trabajos realizados durante el mismo tiempo *dt* por cada una de las fuerzas separadamente,

$$\delta A = \sum_{i=1}^{n} \delta A_i = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i\, d\mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i \mathbf{v}_i\, dt,$$