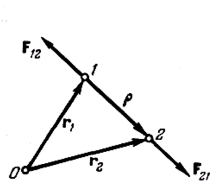

FIG. I.3.3.

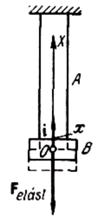

FIG. I.2.4.

En la fig. 1.3.3 se muestran las fuerzas de repulsión mutua $\mathbf{F}_{12}$ y $\mathbf{F}_{21} = - \mathbf{F}_{12}$:

$$\mathbf{F}_{21} = F_\rho(\rho)\frac{\boldsymbol{\rho}}{\rho},$$

donde $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ es el radio vector trazado desde el punto 1 hasta el punto 2, y F_p (p), la proyección de la fuerza F_{21} sobre la dirección del vector $\boldsymbol{\rho}$, que sólo depende de la distancia $\boldsymbol{\rho}$ entre los puntos. Una pequeña variación de la energía potencial del sistema

$$dW_p = -(\mathbf{F}_{12}d\mathbf{r}_1 + \mathbf{F}_{21}d\mathbf{r}_2) = -\mathbf{F}_{21}d\boldsymbol{\rho} = -F_\rho(\rho)\,d\rho.$$

Si admitimos que W_p tiende a cero cuando $\boldsymbol{\rho}$ tiende a infinito, entonces

$$W_p(\rho) = \int_\rho^\infty F_\rho(\rho)\,d\rho.$$

Esta energía suele llamarse *energía potencial mutua de dos puntos materiales.*

6°. Ejemplo 4. *Energía potencial de un cuerpo elástico* (por ejemplo, de un muelle) al *estirarse o comprimirse longitudinalmente.* Cuando un cuerpo elástico se deforma surgen en él fuerzas potenciales internas (fuerzas de elasticidad) que dificultan su deformación. Según la ley de Hooke la fuerza elástica $F_{elást}$ con que el cuerpo que se deforma A (fig. 1.3.4) actúa sobre el cuerpo *B* que provoca la deformación, es proporcional a la magnitud de la deformación:

$$\mathbf{F}_{elást} = -kx\mathbf{i}.$$

Aquí $x\mathbf{i}$ es el vector traslación del cuerpo *B,* que caracteriza la deformación del cuerpo *A* (en estado no deformado $x = 0$ durante la compresión $x >$ O y durante la extensión $x < 0$); $k > 0$ es el coeficiente que caracteriza las propiedades elásticas del cuerpo *A.*
La energía potencial del cuerpo deformado (en ausencia de la deformación, o sea, cuando $x = 0$, esta energía se considera nula)

$$W_p = \frac{kx^2}{2}.$$

§ I.3.4. Ley de conservación de la energía mecánica

1° Se llama *energía mecánica o energía mecánica total,* la energía del movimiento mecánico y de la interacción. La energía mecánica *W* de un sistema de puntos materiales es igual a la suma de su energía cinética W_c y de la energía potencial W_p de la interacción de estos puntos entre sí y con los cuerpos externos:

$$W = W_c + W_p.$$

El incremento elemental de la energía mecánica del sistema durante un pequeño intervalo de tiempo *dt*

$$dW = \delta A_{n.p} + \frac{\partial W_p}{\partial t}\,dt,$$

donde $\delta A_{n.p}$ es la suma algebraica de los trabajos elementales realizados durante el tiempo *dt* por todas las fuerzas no potenciales, externas e internas, que actúan sobre el sistema. El $\partial W_p/\partial t\, dt$ es la variación que durante el tiempo *dt* experimenta la energía potencial del sistema y, respectivamente, su energía mecánica total, debida al carácter no estacionario de las fuerzas potenciales externas (1.3.3.1°).

2°. Si el sistema es *conservativo* (1.3.1.7°), $\delta A_{n.p} = 0$ y $\partial W_p/dt = 0$. Respectivamente, la energía mecánica de este sistema W = const, es decir, es válida la siguiente *ley de conservación de la energía mecánica:* cuando un sistema conservativo se mueve, su energía mecánica no varía.

En particular esta ley es justa para los sistemas conservativos cerrados: la energía mecánica de un sistema cerrado no varía con el tiempo, si todas las fuerzas internas que actúan en dicho sistema son potenciales o no realizan trabajo.

La ley de conservación de la energía mecánica está relacionada con la *homogeneidad del tiempo.* Esta propiedad del tiempo se manifiesta en que las leyes del movimiento de un sistema cerrado (o de un sistema que se encuentra en un campo exterior estacionario) no dependen del punto (instante) de referencia del tiempo que se elija. Por ejemplo, en la caída libre de un cuerpo en el campo potencial estacionario de la gravedad cerca de la superficie de la Tierra, la velocidad del cuerpo y el espacio recorrido por él sólo dependen de lo que dure la caída libre y de la velocidad inicial, pero no del instante concreto en que el cuerpo empezó a caer.

3°. La energía mecánica de un sistema cerrado *no conservativo* varía a expensas del trabajo que realizan todas las fuerzas internas no potenciales:

$$dW = \delta A_{n.p}.$$

Las fuerzas giroscópicas (1.3.1.7°) no realizan trabajo ni hacen aportación a $\delta A_{n\cdot p}$, es decir, la existencia de estas fuerzas en el sistema no provoca variación de su energía mecánica.

La acción de las fuerzas disipativas (1.3.1.7°), por ejemplo las fuerzas de rozamiento, ocasiona una disminución paulatina de la energía mecánica del sistema cerrado. Este proceso se llama *disipación de la energía.* Respectivamente, un sistema cuya energía mecánica disminuye continuamente con el tiempo, recibe el nombre de s*istema disipativo.* Durante la disipación de la energía se produce la transformación de la energía mecánica del sistema en otras formas de energía (por ejemplo, en energía del movimiento desordenado de las moléculas). La transformación de la energía mecánica se efectúa de acuerdo con una de las leyes generales de la naturaleza, la ley de conservación de la energía (11.2.2.7°).

Según esta ley, la energía puede pasar de una forma a otra y redistribuirse dentro del sistema, pero su cantidad total en un sistema cerrado debe permanecer constante. De la ley de conservación y transformación de la energía se deduce que la variación de la energía de un sistema no cerrado que se produce al interaccionar éste con el medio exterior (con los cuerpos y campos externos), debe ser numéricamente igual y de signo contrario a la variación de la energía del medio exterior. En otras palabras, la variación de la energía del sistema al interaccionar con el medio exterior debe ser igual a la energía que dicho sistema recibe del exterior en el proceso que se considere.

Esta igualdad expresa el *teorema de Koenigs:* la energía cinética de un sistema mecánico es igual a la suma de la energía cinética que tendría un punto material de masa igual a la de todo el sistema y que se moviera con la velocidad de su centro de inercia, y de la energía cinética del mismo sistema en su movimiento con respecto al sistema de referencia móvil con origen en el centro de inercia.

Del teorema de Koenigs se deduce que la energía cinética de un cuerpo rígido es igual a la suma de la energía cinética del movimiento de traslación de este cuerpo con la velocidad de su centro de inercia, y de la energía cinética de la rotación del cuerpo alrededor del centro de inercia.

§ I.3.3. Energía potencial

1°. Se llama *energía potencial* la parte de la energía de un sistema mecánico que sólo depende de su *configuración,* es decir de la posición mutua de todas las partículas (puntos materiales del sistema y de sus posiciones en el campo de potencial externo (1.3.1.6). La disminución de la energía potencial al trasladarse el sistema desde una posición arbitraria 1 a otra posición arbitraria 2 se mide por el trabajo A_{12} que realizan al ocurrir esto todas las fuerzas potenciales (internas y externas) que actúan sobre el sistema,

$$W_p(1) - W_p(2) = A_{12},$$

aquí W_p (1) y W_p (2) son los valores de la energía potencial del sistema en las posiciones inicial y final. Respectivamente, el trabajo de las fuerzas potenciales durante una pequeña variación de la configuración del sistema $\delta A = dW_p$.

Observación. Se supone que las fuerzas potenciales externas son *estacionarias,* o sea, pueden variar con el tiempo solamente como consecuencia del cambio de posición del sistema considerado con respecto al sistema de referencia. En el caso contrario

$$dW_p = -\delta A + \frac{\partial W_p}{\partial t} dt.$$

En el caso más simple, en que el sistema es un punto material situado en un campo de potencial, la relación entre la fuerza **F** que actúa sobre el punto y la energía potencial W_p de este punto en el campo tiene la forma

$$F_x = -\frac{\partial W_p}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial W_p}{\partial y},$$

$$F_z = -\frac{\partial W_p}{\partial z} \quad \text{y} \quad \mathbf{F} = -\mathbf{grad}\, W_p.$$

La energía potencial del punto material W_p está ligada con la función de la fuerza (1.3.1.9°) del campo de potencial correspondiente por la relación:

$$dW_p = -d\Phi \quad \text{o} \quad W_p(x, y, z, t) = -\Phi(x, y, z, t) + C,$$

siendo C la constante de integración.

2°. Las relaciones del p. 1 permiten hallar la dependencia de la energía potencial del sistema respecto de su configuración solamente con la exactitud de hasta un sumando constante arbitrario que no influye en la *variación* de la energía. Para obtener la dependencia unívoca de la energía potencial del sistema respecto de su configuración, en cada caso concreto se elige la llamada *configuración de referencia o nula,* en la cual la energía potencial del sistema se considera convencionalmente igual a cero. De este modo

hacia la derecha desde la frontera *d.* En la región /// el punto material oscila entre los puntos *b* y *c,* encontrándose en el llamado *pozo de potencial bfc.*

§ I.3.5. Choque perfectamente elástico e inelástico

1°. Se llama *choque, colisión* o *percusión* el encuentro de cuerpos en el cual, durante un pequeño intervalo de tiempo, se produce una importante variación de sus velocidades. Son ejemplos de choque el golpe descargado con un martillo sobre una pieza puesta en el yunque para ser forjada o sobre la cabeza e un clavo para clavarlo, etc.
Se da el nombre de *línea de choque* a la normal común trazada a las superficies de los cuerpos que participan en la colisión en el punto en que entran en contacto durante el choque. Se dice que el choque es *central, si* en el instante de la colisión los centros de inercia (1.2.3.3°) de los cuerpos percutientes se encuentran en la línea de choque. De ejemplo de este choque sirve la colisión de dos esferas. El choque recibe el nombre de *directo* si, antes de la colisión, las velocidades de los centros de inercia de los cuerpos que se encuentran están dirigidas paralelamente a la línea de choque. En el caso contrario se dice que el choque es *oblicuo.*

2°. Al chocar, los cuerpos se deforman y en los puntos de contacto surgen fuerzas, de acción efímera pero muy importantes, llamadas *fuerzas de choque.* Para los sistemas de cuerpos que chocan estas fuerzas son internas (se supone que los cuerpos que chocan son libres (1.2.2.3°) o que las ligaduras que se les imponen son tales, que no surgen reacciones de ligadura por el choque) es decir, no varían el impulso total del sistema. Las fuerzas externas que actúan continuamente sobre el sistema (como, por ejemplo, la gravedad) son generalmente muy pequeñas en comparación con las de choque. Por esto, aunque los impulsos de las fuerzas de choque (1.2.4.2°), durante el tiempo τ que dura la colisión, son comparables con los impulsos de los cuerpos que chocan (1.2.3.4°), el impulso resultante de todas las fuerzas externas que actúan continuamente durante este mismo intervalo de tiempo τ, es pequeño comparado con los impulsos de los cuerpos. Respectivamente, el trabajo que realizan las fuerzas externas sobre el sistema durante el tiempo τ, también es pequeño en comparación con la energía mecánica del sistema. De este modo, en el proceso de la colisión, el sistema de cuerpos se puede considerar aproximadamente como cerrado (1.2.2.4°), y para calcular los resultados del choque hay que utilizar las leyes de conservación del impulso (1.2.7.1°), del momento del impulso (momento de la cantidad de movimiento) (1.4.4.1°) y de la energía (11.2.2.7°). Si durante el choque los cuerpos se deforman como perfectamente elásticos, las fuerzas de choque son potenciales y en el sistema se cumple la ley de conservación de la energía mecánica (1.3.4.2°).

3°. El choque de dos cuerpos se llama *absolutamente inelástico* si después de él ambos cuerpos se mueven como si fueran uno sólo. Ejemplos bastante aproximados de choque absolutamente inelástico son los procesos como el golpe de la maza de un martinete en el pilote que se clava, o el impacto de una bala en una carretilla cargada de arena, en la cual se atasca aquélla. El choque inelástico se produce en los cuerpos que se encuentran procesos de distinto tipo (deformación plástica, rozamiento, etc.) como resultado de los cuales la energía cinética del sistema se transforma parcialmente en energía interna del mismo (11.2.1.2°).

Si dos cuerpos de masas m_1 *y* m_2 animados de movimiento de traslación con las velocidades $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ sufren un *choque central, directo, absolutamente inelástico,* después de él estarán también animados de movimiento de traslación con la velocidad

$$\mathbf{u} = \frac{m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2}{m_1 + m_2}$$

8°. El trabajo elemental de la fuerza F que ejerce sobre un punto material un campo potencial estacionario se puede representar en forma de diferencial total de la función escalar de las coordenadas O (z, *y, z)* llamada *función de la fuerza* de este campo:

$$\mathbf{F}\,d\mathbf{r}=d\Phi,\quad \text{o}\quad F_x\,dx+F_y\,dy+F_z\,dz=\frac{\partial\Phi}{\partial x}dx+\frac{\partial\Phi}{\partial y}dy+\frac{\partial\Phi}{\partial z}dz.$$

Por consiguiente,

$$F_x=\frac{\partial\Phi}{\partial x},\quad F_y=\frac{\partial\Phi}{\partial y},\quad F_z=\frac{\partial\Phi}{\partial z}\quad \text{y}\quad F=\operatorname{grad}\Phi.$$

Las últimas relaciones son válidas también para un campo potencial no estacionario, cuya función de la fuerza no sólo dependa de las coordenadas, sino también del tiempo: $\Phi=\Phi(x,y,z,t)$. , Pero en este caso

$$\mathbf{F}\,d\mathbf{r}=d\Phi-\frac{\partial\Phi}{\partial t}dt.$$

El trabajo elemental de la fuerza no potencial no se puede representar en forma de diferencial total de una función cualquiera de las coordenadas. Precisamente por esto el trabajo elemental de una fuerza arbitraria se ha representado por δA

9°. Para caracterizar el trabajo realizado en la unidad de tiempo se utiliza en la mecánica el concepto de potencia. La *potencia (potencia instantánea)* es una magnitud física escalar *N* igual a la razón del trabajo elemental δA al pequeño intervalo de tiempo *dt,* durante el cual se realiza este trabajo,

$$N=\frac{\delta A}{dt}.$$

Si F es la fuerza que efectúa el trabajo δA, la potencia es igual al producto escalar de la fuerza **F** por la velocidad **v** de su punto de aplicación:

$$N=\mathbf{F}\mathbf{v}=F_\tau v.$$

En el caso general la potencia puede variar con el tiempo.

Se llama *potencia media* en un intervalo de tiempo de *t* a *t* Δt; la magnitud física $\langle N\rangle$ igual a la razón del trabajo *A* realizado en este intervalo de tiempo, a su duración Δt:

$$\langle N\rangle=\frac{A}{\Delta t}.$$

§ I.3.2. Energía cinética

1°. Se da el nombre de *energía cinética* de un cuerpo a la energía de su movimiento mecánico. La variación de la energía cinética W_c de un punto material por la acción de una fuerza **F**, es igual al trabajo realizado por esta fuerza,

$$dW_c=\delta A=\mathbf{v}\,d\mathbf{p},$$

siendo **p** = m**v** el impulso del punto material, y *m* y **v**, respectivamente, su masa y velocidad. En la mecánica newtoniana *m* = const y la expresión para la energía cinética del punto material tiene la forma

$$W_c=\frac{m\mathbf{v}^2}{2}=\frac{mv^2}{2}.$$

De la energía cinética en la mecánica relativista se trata en 1.5.7.1°.

2°. La energía cinética de un sistema mecánico es igual a la suma de las energías cinéticas de todas las partes del sistema. Por ejemplo, para un sistema compuesto de re puntos materiales,

En particular, si las masas de los cuerpos son iguales, al chocar intercambian sus velocidades: $u_{1x}=v_{2x}$ y $u_{2x}=v_{1x}$.

Si la masa del segundo cuerpo es mucho mayor que la del primero, entonces $u_{1x}\approx 2v_{2x}-v_{1x}$ y $u_{2x}\approx v_{2x}$.

6°. Ejemplo 2. *Choque central, oblicuo, perfectamente elástico.* Si los cuerpos son lisos, el impulso de las fuerzas de rozamiento durante el choque se puede despreciar. En este caso no varían las componentes tangenciales de las velocidades de los cuerpos, es decir, las componentes perpendiculares a la línea de choque: $u_{1\tau}=v_{1\tau}$ y $u_{2\tau}=v_{2\tau}$. Las componentes normales, dirigidas a lo largo de la línea de choque, varían lo mismo que si éste fuera directo:

$$u_{1n}=\frac{(m_1-m_2)\,v_{1n}+2m_2v_{2n}}{m_1+m_2},\quad u_{2n}=\frac{2m_1v_{1n}+(m_2-m_1)\,v_{2n}}{m_1+m_2}.$$

En particular, en el choque oblicuo, perfectamente elástico, de una esfera lisa con una pared plana fija ($m_2\gg m_1$, $u_2=v_2=0$)

$$u_{1\tau}=v_{1\tau},\quad u_{1n}=-v_{1n},$$

es decir, la esfera rebota en la pared de acuerdo con la ley de reflexión especular: el ángulo de reflexión es igual al ángulo de incidencia. El valor numérico de la velocidad se conserva: $u_1=v_1$. El vector variación del impulso de la esfera Δp_1, al chocar está dirigido perpendicularmente a la pared:

$$\Delta\mathbf{p}_1=m_1(\mathbf{u}_1-\mathbf{v}_1)=-2m_1\mathbf{v}_{1n}.$$

El impulso de la fuerza de choque que actúa sobre la pared es igual a $2m_1\mathbf{v}_{1n}$.

siendo $\mathbf{r}_i$ y $\mathbf{v}_i$, respectivamente, el radio vector y la velocidad del punto de aplicación de la fuerza $\mathbf{F}_i$.

Por ejemplo, para un punto material $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}$ es el radio vector de este punto y $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}$ es su velocidad. Respectivamente, $\delta A = \mathbf{F}\, d\mathbf{r} = \mathbf{F}\mathbf{v}\, dt$, , donde

$$F = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i$$

es la fuerza resultante(I.2.2.2°). De la segunda ley de Newton (I.2.4.1°) se deduce que para un punto material

$$\delta A = \mathbf{v}\, dp,$$

siendo p = mv el impulso del punto, y m su masa.

En el caso del movimiento de traslación de un cuerpo rígido $d\mathbf{r}_i = d\mathbf{r}_c$ y $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_c$, donde $\mathbf{r}_c$ y $\mathbf{v}_c$ son, respectivamente, el radio vector y la velocidad del centro de inercia del cuerpo (1.2.3.3°).

El trabajo de las fuerzas intrínsecas en cualquier movimiento de un cuerpo rígido es igual a cero. Por esto, cuando el movimiento de dicho cuerpo es de traslación, $\delta A = \mathbf{F}^{ext} d\mathbf{r}_C = = \mathbf{F}^{ext} \mathbf{v}_C\, dt$, donde $\mathbf{F}^{ext}$ es el vector resultante de las fuerzas externas (1.2.5.2°). De la ley del movimiento del centro de inercia (1.2.5.3°) se deduce que

$$\delta A = \mathbf{v}_C d\mathbf{p},$$

siendo $\mathbf{p} = m\mathbf{v}_c$ el impulso de un sólido de masa m que se muéve con la velocidad de traslación $\mathbf{v} = \mathbf{v}_C$.

5°. El trabajo A realizado por una fuerza $\mathbf{F}$ en un trozo finito de la trayectoria L de su punto de aplicación, es igual a la suma algebraica de los trabajos realizados en todas las partes pequeñas de este trozo, es decir, se expresa por la integral curvilínea

$$A = \int_{(L)} \mathbf{F}\, d\mathbf{r} = \int_0^s F_\tau\, ds,$$

en la que s es el espacio recorrido a lo largo de la trayectoria desde el comienzo del trozo considerado, y F_τ, la proyección sobre la dirección del desplazamiento dr de su punto de aplicación. Para calcular esta integral hay que conocer la dependencia de F_τ respecto de s a lo largo de la trayectoria L. Si esta dependencia está representada gráficamente (fig. 1.3.1), el trabajo buscado A *se* mide por el área rayada en la fig. 1.3.1.

6°. Se llaman *fuerzas potenciales* aquellas cuyo trabajo sólo depende de las posiciones iniciales y finales de sus untos de aplicación, y no de la forma de las trayectorias de estos puntos ni de las leyes de su movimiento por éstas.

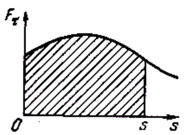

FIG. I.3.1.

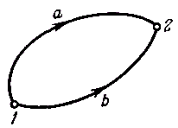

FIG. I.3.2.

Por ejemplo, las fuerzas de interacción de las partes de un sistema (puntos materiales) son potenciales si sólo dependen de la configuración del sistema, es decir, de