El incremento de la energía cinética del sólido durante el tiempo dt es igual al trabajo de las fuerzas externas:

$$dW_c = M_z^{ext} d\varphi,$$

siendo M_z^{ext} el momento resultante de las fuerzas externas respecto al eje de rotación del cuerpo.

6°. *El movimiento de un sólido Ubre* satisface las dos ecuaciones diferenciales siguientes:

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}_C) = \mathbf{F}^{ext} \quad \text{y} \quad \frac{d\mathbf{L}_C}{dt} = \mathbf{M}_C^{ext}.$$

Aquí m es la masa del cuerpo; $\mathbf{v}_c$, la velocidad de su centro de inercia C; $\mathbf{F}^{ext}$, el vector resultante de las fuerzas externas aplicadas al cuerpo (I.2.5.2°); M^{ext}, el momento resultante de las fuerzas externas respecto del punto C (I.4.1.6°), y L_C es el momento del impulso del cuerpo con relación a este mismo punto C (I.4.1.7°). La primera ecuación describe el movimiento de traslación del cuerpo libre con la velocidad de su centro de inercia (I.2.5.3°). La segunda ecuación se deduce de la ley de variación del momento del impulso (I.4.3.1°) y define la rotación del sólido alrededor de su centro de inercia (I.1.5.9°).

7°. La energía cinética de un sólido libre puede hallarse basándose en el teorema de Koenigs (I.3.2.4°);

$$W_c = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{J_C\omega^2}{2},$$

en el que J_C es el momento de inercia del cuerpo respecto del eje instantáneo de rotación que pasa por su centro de inercia C, y w es la velocidad angular del cuerpo. En el caso general el eje instantáneo se desplaza en el cuerpo, y el momento de inercia J_C varía con el tiempo. La magnitud J_C permanece constante si el movimiento del cuerpo es plano (I.1.5.9°).

Ejemplo. Energía cinética de un cilindro circular homogéneo que rueda por un plano inclinado sin deslizamiento. El movimiento del cilindro es plano: todos sus puntos se mueven en planos verticales paralelos entre sí. El cilindro está animado de movimiento de traslación con la velocidad v_c dirigida a lo largo del plano inclinado, y gira alrededor de su eje ($J_C = mR^2/2$, siendo m y R, respectivamente, la masa y el radio del cilindro) con velocidad angular w. De la condición de ausencia de deslizamiento se deduce que la velocidad instantánea de los puntos de contacto del cilindro con el plano inclinado es nula, es decir, $w = v_C/R$. Por esto la energía cinética del cilindro que rueda es:

$$W_c = \frac{mv_C^2}{2} = \frac{J_C\omega^2}{2} = \frac{3}{4} mv_C^2.$$

§ I.4.4. Ley de conservación del momento de impulso

1°. *Ley de conservación del momento de impulso:* el momento del impulso de un sistema cerrado (I.2.2.4°) respecto de cualquier punto fijo no varía con el tiempo, es decir,

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} \equiv 0 \quad \text{y} \quad \mathbf{L} = \text{const}.$$

Cuerpo	Posición del eje a	Momento de inercia J_a
Cilindro hueco de paredes delgadas, radio R y masa m	El eje del cilindro	mR^2
Cilindro macizo (disco) de radio R y masa m	El eje del cilindro	$\frac{1}{2} mR^2$
Esfera maciza de radio R y masa m	El eje pasa por el centro de la esfera	$\frac{2}{5} mR^2$
Esfera de paredes delgadas de radio R y masa m	El eje pasa por el centro de la esfera	$\frac{2}{3} mR^2$
Varilla delgada, recta, de longitud l y masa m	El eje es perpendicular a la varilla y pasa por su centro	$\frac{1}{12} ml^2$
La misma varilla	El eje es perpendicular a la varilla y pasa por su extremo	$\frac{1}{3} ml^2$

Tabla1.4.1

4°. Reciben el nombre de *momentos de inercia centrífugos de un cuerpo* con relación a los ejes de un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares, las magnitudes siguientes:

$$J_{xy} = \int_{(m)} xy\, dm = \int_{(V)} xyD\, dV,$$

$$J_{xz} = \int_{(m)} xz\, dm = \int_{(V)} xzD\, dV,$$

$$J_{yz} = \int_{(m)} yz\, dm = \int_{(V)} yzD\, dV,$$

en las que x, y y z son las coordenadas de un pequeño elemento del cuerpo de volumen dV, densidad D y masa dm.

El eje OX se llama *eje principal de inercia del cuerpo,* si los momentos centrífugos de inercia J_{xy} y J_{xz} son nulos simultáneamente. Por cada punto de un cuerpo se pueden trazar tres ejes de inercia principales. Estos ejes son perpendiculares entre sí. Los momentos de inercia del cuerpo con respecto a los tres ejes de inercia principales, trazados por un punto arbitrario O de dicho cuerpo, se llaman *momentos de inercia principales del cuerpo.*

Los ejes de inercia principales que pasan por el centro de inercia del cuerpo reciben el nombre de *ejes centrales principales de inercia del cuerpo,* y los momentos de inercia del cuerpo con respecto a estos ejes se dice que son sus *momentos centrales principales de inercia.* El eje de simetría de un cuerpo homogéneo es siempre uno de sus ejes de inercia centrales principales.

§ I.4.3. Ley fundamental de la dinámica del movimiento de rotación

1°. De las leyes de Newton se deduce que la primera derivada respecto del tiempo t del momento del impulso $\mathbf{L}$ de un sistema mecánico con relación a cualquier punto fijo O es igual al momento resultante $\mathbf{M}^{ext}$, respecto del mismo punto O, de todas las fuerzas externas aplicadas al sistema:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}^{ext}.$$

momento del impulso del sistema con relación a este mismo eje no varía con el tiempo. Por ejemplo, si $M_z^{ext} = 0$, entonces L_z = const.

En caso de que el sistema gire alrededor de un eje fijo *OZ y* el momento resultante de las fuerzas externas respecto de este eje $M_z^{ext} = 0$, el momento del impulso del sistema respecto del eje de rotación no variará con el tiempo:

$$J_z\omega = \mathrm{const},$$

donde *w y* J_z son, respectivamente, la velocidad angular y el momento de inercia del sistema.

Si bajo la acción de las fuerzas internas, y también de las externas, que satisfacen la condición $M_z^{ext} = 0$, se deforma el sistema y su momento de inercia J_z varía, respectivamente aumenta o disminuye la velocidad angular *w*.

4°. Se llaman *ejes libres de un cuerpo,* aquellos alrededor de los cuales el sólido libre (I.2.2.3°) puede girar con velocidad angular *w* constante en ausencia de toda clase de acciones externas. Esta rotación del cuerpo se dice que es inercial o *libre.* Los ejes libres de un cuerpo coinciden con sus ejes centrales principales de inercia (I.4.2.4°). En el caso general los valores J_1 , J_2 y J_3 de los momentos centrales principales de inercia del cuerpo (I.4.2.4°) son distintos. La rotación libre de un cuerpo de este tipo (por ejemplo, de un paralelepípedo rectangular homogéneo con aristas de distinta longitud) se efectúa en la práctica solamente alrededor de dos ejes libres, correspondientes a los valores extremos de los momentos centrales principales de inercia, es decir, al mayor y al menor. La rotación del cuerpo alrededor de su tercer eje central principal, correspondiente a un valor intermedio del momento de inercia, es inestable incluso acciones pequeñas son capaces de provocar desviaciones importantes del eje instantáneo de rotación del cuerpo respecto de su dirección inicial en el mismo.

Si los valores de dos momentos centrales principales de inercia de un cuerpo son iguales: $J_1 = J_2 \neq J_3$, la rotación libre y estable de este cuerpo (por ejemplo, de un cilindro circular homogéneo (sólo es posible alrededor del eje libre correspondiente al tercer valor, distinto de aquellos, del momento de inercia del cuerpo J_3. Para un cilindro circular homogéneo este eje libre es su eje de simetría. Pero si un cilindro largo y delgado se hace girar valiéndose de un hilo sujeto a su extremo, resultará ser estable la rotación del cilindro alrededor del eje libre correspondiente al valor mayor de su momento de inercia. Este eje libre es perpendicular al eje de simetría del cilindro.

$$L_a = \sum_{i=1}^{n} [\mathbf{r}_i m_i \mathbf{v}_i]_a.$$

La elección que se haga de la posición del punto *O* en el eje a no influye en el valor numérico de L_a.

Observación. Algunas veces *se* entiende por momento del impulso de un sistema con respecto a un eje fijo a, la magnitud vectorial $\mathbf{L}_a = L_a\mathbf{i}_a$, en la que $\mathbf{i}_a$ es el versor del eje *a*.

5°. *El momento del impulso de un cuerpo con respecto a un punto fijo O,* alrededor del cual gira el cuerpo con la velocidad angular ω, es:

$$\mathbf{L} = \int_{(m)} [\mathbf{r}\mathbf{v}]\, dm = \int_{(m)} [\mathbf{r}\,[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]]\, dm,$$

donde **r** es el radio vector trazado desde el punto *O* a un pequeño elemento del cuerpo de masa *dm,* y $\mathbf{v} = [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]$ es la velocidad de este elemento. Como $[\mathbf{r}\,[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]] = r^2\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega}\mathbf{r})\,\mathbf{r}$, las direcciones de los vectores **L** y *w*, en el caso general, no coinciden:

$$\mathbf{L} = \boldsymbol{\omega} \int_{(m)} r^2\, dm - \int_{(m)} (\boldsymbol{\omega}\mathbf{r})\,\mathbf{r}\, dm.$$

El momento del impulso de un cuerpo sujeto a un punto *O y* su velocidad angular coinciden en dirección si el cuerpo gira alrededor de uno de sus ejes de inercia principales en el punto *O* (I.4.2.4°)

$$\mathbf{L} = J\boldsymbol{\omega},$$

siendo *J* el momento de inercia del cuerpo (I.4.2.1°) con respecto a este eje principal.

6°. Los valores **M** y **M*** del momento resultante de un sistema de fuerzas con respecto a dos puntos fijos distintos *O y O** están ligados por la relación

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}^* + [\mathbf{r}^*\mathbf{F}],$$

en la que **r*** es el radio vector trazado desde el origen *O* al punto *O* *, y F es el vector resultante del sistema de fuerzas considerado. Si **F** = O, entonces el momento resultante del sistema de fuerzas es el mismo con respecto a cualquier punto fijo: **M* = M.** Precisamente esta propiedad la tiene el *par de fuerzas,* es decir, el sistema de dos fuerzas iguales numéricamente entre sí y dirigidas a lo largo de dos rectas paralelas en sentidos opuestos. La distancia más corta *d* entre las líneas de acción de las fuerzas del par se llama *brazo del par*. El momento de un par de fuerzas está dirigido perpendicularmente al plano en que se hallan las fuerzas, y su modulo es *M = Fd,* siendo *F* el módulo de cada una de las fuerzas del par.

El momento resultante $\mathbf{M}_c$, respecto del centro de inercia *C* de un sistema mecánico (I.2.3.3°), de todas las fuezas que actúan sobre dicho sistema, está ligado con el momento resultante **M** de este mismo sistema de fuerzas con respecto a un punto fijo *O,* por la relación

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_C + [\mathbf{r}_C\,\mathbf{F}],$$

en la que $\mathbf{r}_C$ es el radio vector trazado desde el origen *O* al punto C, y **F** es el vector resultante del sistema de fuerzas.

7°. Los valores del momento del impulso de un sistema mecánico respecto de su centro de inercia *C* para el movimiento absoluto de los puntos con las velocidades v_i (es decir, con relación a un sistema inercial de referencia fijo) y para su movimiento relativo con las

Capítulo I.4. Dinámica del movimiento de rotación

§ I.4.1. Momento de fuerza y momento de impulso

1°. Para caracterizar la acción mecánica externa ejercida sobre un cuerpo que hace que varíe su movimiento de rotación, se introduce el concepto de momento de fuerza. Se hace distinción entre momento de fuerza con respecto a un punto fijo y con respecto a un eje fijo.

El *momento de una fuerza F con respecto a un punto fijo O (polo)* es una magnitud vectorial M igual al producto vectorial el radio vector **r** trazado desde el punto *O* al punto *A* de aplicación de la fuerza (fig. 1.4.1), por el vector de la fuerza **F**:

$$\mathbf{M} = [\mathbf{r}\mathbf{F}].$$

El módulo del momento de la fuerza es $M = Fr\, sen\alpha = Fl$ donde α es el ángulo entre los vectores **r** y **F**, y $l = r\, sen\alpha$ es la longitud de la perpendicular *OB* (fig. 1.4.1) bajada desde el punto O a la línea de acción de la fuerza. La magnitud *I* se llama *brazo de la fuerza* con respecto al punto *O.* Si el punto de aplicación de la fuerza F se traslada a lo largo de su línea de acción, el momento M de la fuerza con respecto a un mismo punto fijo *O,* no varía. Si la línea de acción de la fuerza pasa por el punto *O,* el momento de la fuerza con respecto a este punto es nulo.

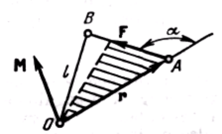

FIG. I.4.1.

2°. Se llama *momento resultante* de un sistema de fuerzas *con respecto a un punto, fijo O (polo),* el vector M igual a la suma geométrica de los momentos de las *n* fuerzas del sistema con respecto al punto *O:*

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^{n} [\mathbf{r}_i \mathbf{F}_i],$$

donde r¡ es el radio vector trazado desde el punto *O* al punto de aplicación de la fuerza F_i De la tercera ley de Newton (I.2.5.1°) se deduce que los momentos, respecto del polo *O,* de las fuerzas internas de interacción de los puntos materiales del sistema, se compensan de dos en dos: $[\mathbf{r}_i \mathbf{F}_{ik}] = -[\mathbf{r}_k \mathbf{F}_{ki}]$. Por consiguiente, al calcular el momento resultante de las fuerzas hay que tener en cuenta solamente las fuerzas *externas* que actúan sobre el sistema mecánico que se considera.

3°. Se da el nombre de *momento de una fuerza F con respecto a un eje fijo a* a una magnitud escalar M_a igual a la proyección sobre este eje del vector **M** del momento de la fuerza **F** con respecto a un punto arbitrario *O* del eje a. El valor del momento M_a no depende de la posición que se elija del punto *O* sobre el eje *a.*

Observación. A veces se entiende por momento de una fuerza con respecto a un eje fijo *a* la magnitud vectorial $\mathbf{M}_a = M_a \mathbf{i}_a$, donde $\mathbf{i}_a$ es el versor del eje *a.* El vector $\mathbf{M}_a$ es la