DEPARTAMENTO DE FISICA Y GEOLOGIA

UNIVERSIDAD DE PAMPLONA
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS

Objetivos

Objetivo General:

- Estudiar el uso de gráficas para la obtención de las relaciones funcionales entre dos magnitudes físicas.

Objetivos Específicos:

- Aprender a identificar las variables que intervienen en un experimento físico.
- Aprender a elaborar correctamente gráficas en papel milimetrado.
- Relacionar las variables representadas mediante una función matemática.
- Graficar a escalas adecuadas los datos experimentales con el fin de facilitar la interpretación y cálculo de las constantes en las gráficas.

Materiales

Equipo requerido	Cantidad	Observaciones
Papel milimetrado.	4	
Escuadras.	2	
Calculadora	1	

Marco teórico y Procedimiento

En física es muy importante, además de predecir el error que tiene una medición, formular la ley que rige el fenómeno en estudio, o sea, que las experiencias realizadas permita determinar la tendencia o relación entre las variables que influyen en el evento estudiado. Estas leyes físicas expresadas en forma matemática es lo que constituye una ***"relación funcional".*** Uno de los objetivos del experimentador es tratar de expresar la relación entre las diferentes variables en su experimento en la forma de una ecuación matemática.

Cuando una cantidad se relaciona con otra por medio de alguna ecuación, se dice que una de las cantidades es función de la otra. Así, si la variable observable ***y*** está relacionada con la variable ***x***, se dice que ***y*** es una función de ***x***. Generalmente, esta relación se escribe, en notación abreviada, como ***y = f(x)*** la cual se lee: ***"y es una función de x".*** Cuando los valores de ***y*** dependen de los de ***x***, la variable ***y*** se denomina variable dependiente y ***x*** es la variable independiente. La tarea que nos ocupa ahora es analizar las diferentes formas que puede adoptar una función *f(x)* obtenida a partir de una serie de datos experimentales.

Una de las mejores maneras de llegar al tipo de dependencia funcional que existe entre dos variables, es dibujar una gráfica de las variables en un *sistema cartesiano* de coordenadas. Los valores experimentales de la variable independiente se marcan en el eje horizontal (***abscisa***) y la variable dependiente se marca sobre el eje vertical (***ordenada***). Después de analizar si la tendencia de los puntos en el gráfico se ajusta a una línea recta o a una curva, se puede determinar la naturaleza de la función que relaciona las variables, especialmente si esta función tiene una forma sencilla.

La construcción de gráficas debe iniciarse con la elaboración de una tabla de los datos, los cuales pueden disponerse en columnas o en filas. ***Toda tabla debe llevar un titulo explicativo que indique el significado de los datos y la forma como fueron obtenidos***.

Uno de los requisitos más importantes de un gráfico, es la elección de escalas para los dos ejes de coordenadas. Debe tenerse presente que un gráfico de datos de laboratorio carece de significado si no se identifica cada eje con la cantidad medida y las unidades utilizadas para medir. A continuación se presentan algunas sugerencias para la elaboración de gráficas:

- Poner un título al gráfico que sea conciso y claro. ***Ejemplo:*** ***X*** vs ***t*** ó ***Distancia*** versus ***tiempo.***
- Usar hojas de papel milimetrado ó logarítmico, según sea el caso.
- Seleccionar una escala que facilite la representación y la lectura. Se deben elegir escalas que puedan subdividirse fácilmente. Los valores recomendables son 1, 2, 5 y 10 unidades por escala de división. No se recomiendan escalas como 3, 7, 6, 9 debido a que hacen difícil la localización y la lectura de los valores en el gráfico. ***Procurar que el gráfico ocupe la mayor parte de hoja de papel.***
- No es necesario representar ambas cantidades en la misma escala, ni que comience en cero.
- Representar todos los datos observados. Demarcar claramente los puntos experimentales con un punto dentro de un pequeño círculo, o dentro de un triángulo, o algún otro símbolo semejante, por ejemplo: (⊗, ◊, ⊙). Unir el mayor número de puntos con una curva suave, de modo que aquellos que queden por fuera de la curva queden igualmente repartidos por encima y por debajo. Si el gráfico no es una recta, puede utilizarse para el trazado una plantilla especial llamada ***curvígrafo.***
- Un gráfico quedara más claro y adquirirá una mejor presentación si se hace uso de carteles interiores al gráfico, con información complementaria relevante para entender en qué contexto se muestran los datos o sobre las condiciones experimentales particulares bajo las que se los han obtenido.

ANÁLISIS GRÁFICO

En el análisis de un problema físico se puede partir de la teoría que predice una cierta ley física la cual se expresa con una ecuación cuya forma matemática nos guiará al analizar la forma del gráfico. Es decir, graficando los valores experimentales se tendrán una curva uniforme que muestra la tendencia de los puntos. Enseguida se compara la forma de la curva obtenida, con aquello predicho teóricamente. Si concuerdan, ello corresponde a una comprobación experimental de la ley física considerada. La función matemática más simple es la línea recta y es por ello que tiene gran importancia en el análisis de datos experimentales. ***Por lo tanto es útil linealizar la curva cuando ésta no sea una recta.***

IMPORTANCIA DE LA LÍNEA RECTA

- De una curva es muy difícil deducir cuál es la ecuación que podría representar mejor los resultados.
- Es fácil extrapolar más allá de un rango de valores medidos. Sólo se necesita una regla.
- Determinando la pendiente y la intersección con el eje y, se puede deducir valores numéricos de constantes que obteniéndolos de curvas, resulta muy difícil.

FUNCIÓN LINEAL

La ecuación de una recta está definida por: $\boldsymbol{y} = a\boldsymbol{x} + b.$
Tal es el caso del lanzamiento vertical hacia abajo, cuya ley de movimiento está dada por:

$$v = gt + v_0$$

Si se realiza tal experiencia y se toman valores de $v = f(t)$ se observará que al graficar la tabla de valores de v y $t,$ obtendremos una recta (ver figura 1). Dicha recta nos permitirá determinar la aceleración de gravedad g a través del cálculo de su pendiente. Además se podrá determinar v_0 haciendo una extrapolación de la recta obtenida hasta cortar el eje vertical.

$$\begin{array}{ccccccc} v & = & g & t & + & v_0 \\ \downarrow & & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ \boldsymbol{y} & = & a & \boldsymbol{x} & + & b. \end{array}$$

Por lo tanto para graficar una función tal como la indicada, se utilizará papel milimetrado (papel de uso más común cuyos ejes son ambos lineales, es decir, las divisiones están igualmente espaciadas).

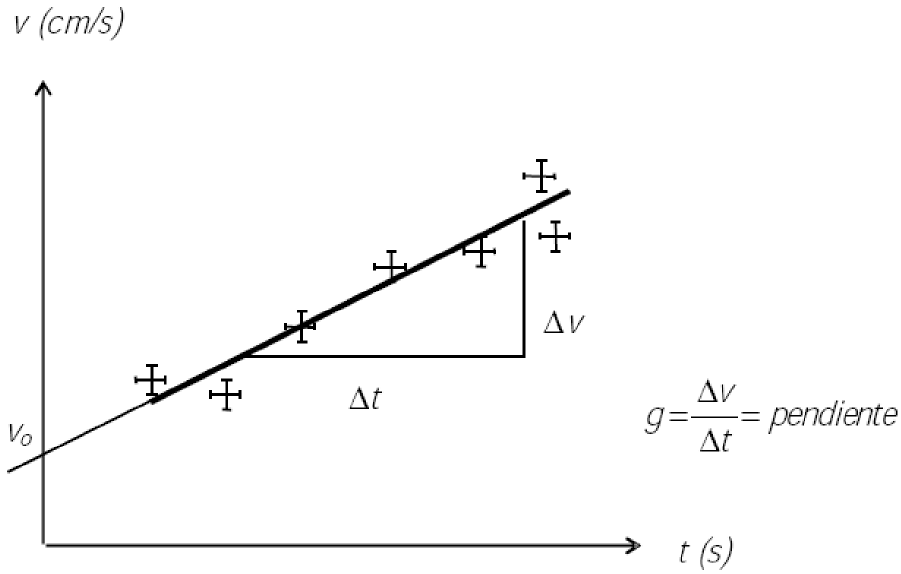


Fig 1. Gráfica de la función $\boldsymbol{v = gt + v_0}$

FUNCIÓN POTENCIAL $\boldsymbol{y = cx^n}$

La ecuación de una función potencial está definida por:

$$y = cx^n\text{, en donde } c \text{ y } n \text{ son constantes.}$$

Al representar los valores de las variables, dependiente e independiente en una gráfica sobre el papel milimetrado, debe resultar la curva característica de la función potencial de la forma como se indica en la figura 2. Si tomamos logaritmo de ambos lados se obtiene:

$$log\, y = n\, log\, x + log\, c \qquad (1)$$

$$\boldsymbol{y} = a \quad \boldsymbol{x} + b.$$

Si hacemos el cambio de variables de acuerdo al esquema anterior, entonces:

$$v = log\, y$$
$$u = log\, x$$
$$k = log\, c$$

tenemos que la ecuación (1) se puede escribir como:

$$v = n\, u + k \qquad (2)$$

que es la ecuación de una recta cuya pendiente viene dada por:

$$n = \frac{\Delta v}{\Delta u} = \frac{v_2 - v_1}{u_2 - u_1} = \frac{log\ y_2 - log\, y_1}{log\ x_2 - log\, x_1}$$

Por lo tanto para graficar una función tal como la ecuación (2), se utilizará papel logarítmico (papel cuyos ejes son ambos logarítmicos con un número de ciclos variables en cada eje) graficando v en función de u y se obtendrá una recta (ver figura 3).

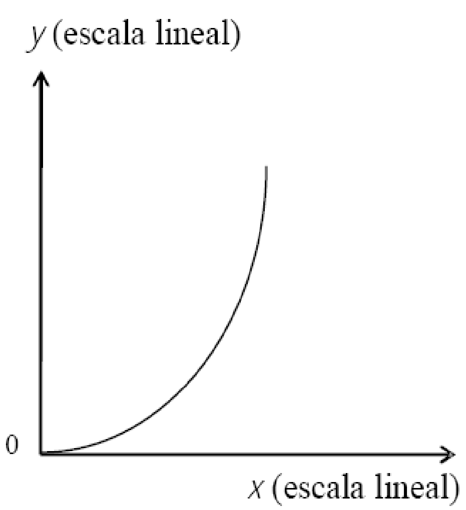


Fig. 2. Función potencial $y = cx^n$

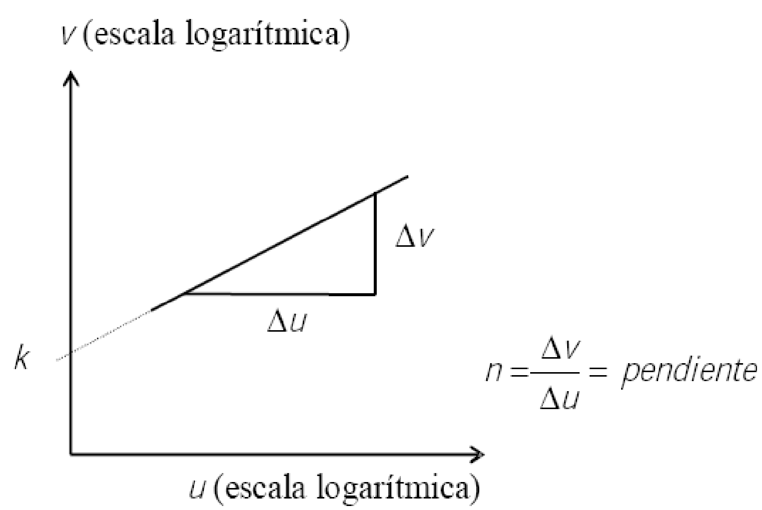


Fig. 3. Grafica de la ecuación 2 en papel logarítmico.

FUNCIÓN EXPONENCIAL

La ecuación de una función exponencial está definida por:

$$y = k\,a^{bx}, \quad donde\ k, a\ y\ b\ son\ constantes.$$

Al representar los valores de las variables, dependiente e independiente en el papel milimetrado, debe resultar la curva característica de la función exponencial tal como se indica en la figura 4.
Si tomamos logaritmo de ambos lados se obtiene:

$$log\, y = bx\,(\,log\, a\,) + log\, k$$

Si $\boldsymbol{a}$ vale 10, debe aplicarse logaritmo en base diez. Si $\boldsymbol{a}$ tiene un valor cualquiera, debe aplicarse logaritmo en base a ese mismo valor. Por ejemplo, si $a = 2$, se aplica logaritmo en base 2. Se tiene entonces:

$$log\, y = bx + log\, k \qquad (3)$$

Si se hace el cambio de variable:

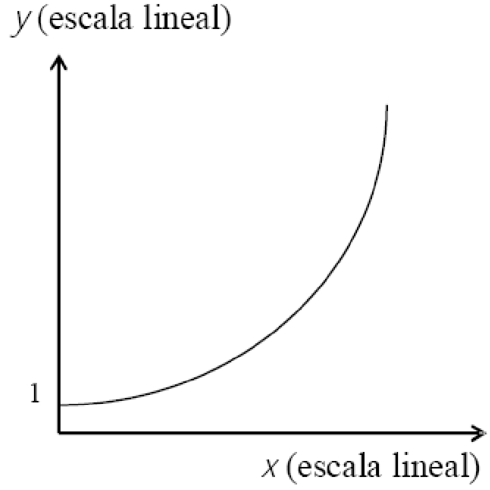
$$u = log\, y$$
$$v = log\, k$$

se tiene que la ecuación (3) resulta:

$$u = bx + v \qquad (4)$$

que es la ecuación de una recta (Figura 5) cuya pendiente viene dada por:

$$b = \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{u_2 - u_1}{x_2 - x_1} = \frac{log\ u_2 - log\ u_1}{x_2 - x_1}$$



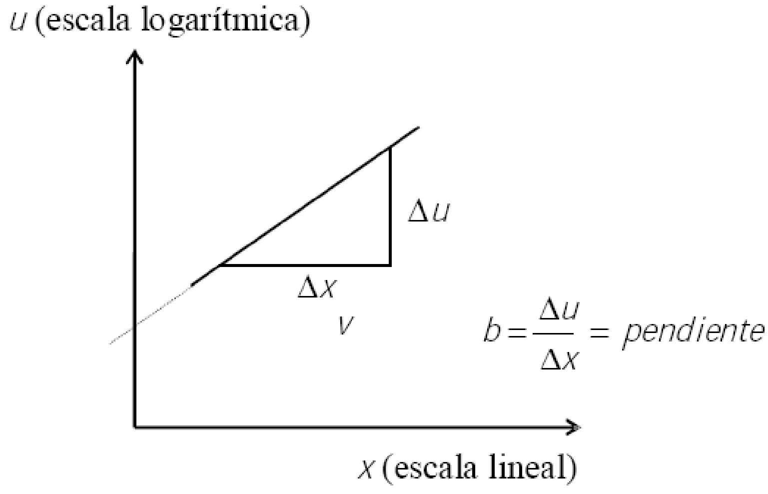


Fig. 4. Función exponencial $y = k\,a^{bx}$ ***Fig. 5. Gráfica de la ecuación 4 en papel logarítmico.***

TRAZADO DE UNA RECTA QUE PASE ENTRE VARIOS PUNTOS

Cuando se grafican puntos experimentales y por ejemplo se obtiene una línea recta como gráfico, ésta usualmente no pasará por todos los puntos graficados. Los métodos estadísticos demuestran que siempre que la dispersión de los puntos experimentales se deba a los errores casuales de medición, la mejor recta pasará por el centroide de los puntos experimentales que es el punto con las coordenadas $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$, en donde $\boldsymbol{x}$ es el valor medio de las coordenadas $\boldsymbol{x}$ de todos los puntos, y $\boldsymbol{y}$ el promedio de las coordenadas $\boldsymbol{y}$. Así que es posible dibujar otras rectas alternativas. La pendiente y la intersección pueden ser obtenidos de la mejor recta que se pueda dibujar, o sea, la recta que mejor se ajuste: ***con igual peso en lo posible***, esto es, igual número de puntos por encima y por debajo de la recta. El centroide se calcula entonces como:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} \qquad \bar{y} = \frac{\sum y_i}{n}$$

La ecuación de la recta será:

$$y = ax + b$$

El error para la pendiente a y el corte con $\boldsymbol{y}$, b, viene dado por la lectura de la posición de los puntos sobre la gráfica.

Criterio de máxima y mínima pendiente

Una vez definido el centroide, la recta de máxima pendiente se construye como la recta que pasa por el centroide y por la mayoría de los puntos situados en la parte superior derecha del centroide y en la parte inferior izquierda de éste. La recta de pendiente mínima debe pasar por el centroide y por la mayoría de puntos situados en la parte inferior derecha del centroide y en la parte superior izquierda de él. La ecuación de la recta óptima es la recta equidistante a ambas rectas y que pasa por el centroide (ver Figura 6). Así la recta óptima será:

$$y = a_{opt}\, x + b_{opt}$$

donde a_{opt} y b_{opt} son la pendiente óptima y el punto de corte óptimo con el eje y.

La pendiente óptima y el corte con el eje y de la recta óptima vienen dados por:

$$a_{ópt} = \frac{a_{max} + a_{min}}{2} \qquad b_{ópt} = \frac{b_{max} + b_{min}}{2}$$

Generalmente el trazado de una recta a partir de ciertos valores obtenidos en un experimento, tiene como finalidad calcular la pendiente de esa recta o su corte con uno de los ejes, para de allí determinar alguna magnitud física. Así por ejemplo, en una experiencia del movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, del gráfico de la velocidad del móvil $\boldsymbol{v}$ en función del tiempo recorrido $\boldsymbol{t}$ se puede obtener la aceleración del móvil calculando la pendiente $\boldsymbol{a}$ y la velocidad inicial $\boldsymbol{v_o}$ a partir del corte con y por extrapolación a través de las ecuaciones:

$$v = v_o + at$$
$$v = b + ax$$

Dichos cálculos implica obtener un valor de la pendiente a y el corte b en un intervalo de error:

$$a \pm \Delta a \qquad\qquad b \pm \Delta b$$

Para calcular los valores de $\Delta \boldsymbol{a}$ y $\Delta \boldsymbol{b}$ se tiene entonces:

$$\Delta a = \frac{a_{max} - a_{min}}{2} \qquad \Delta b = \frac{b_{max} - b_{min}}{2}$$

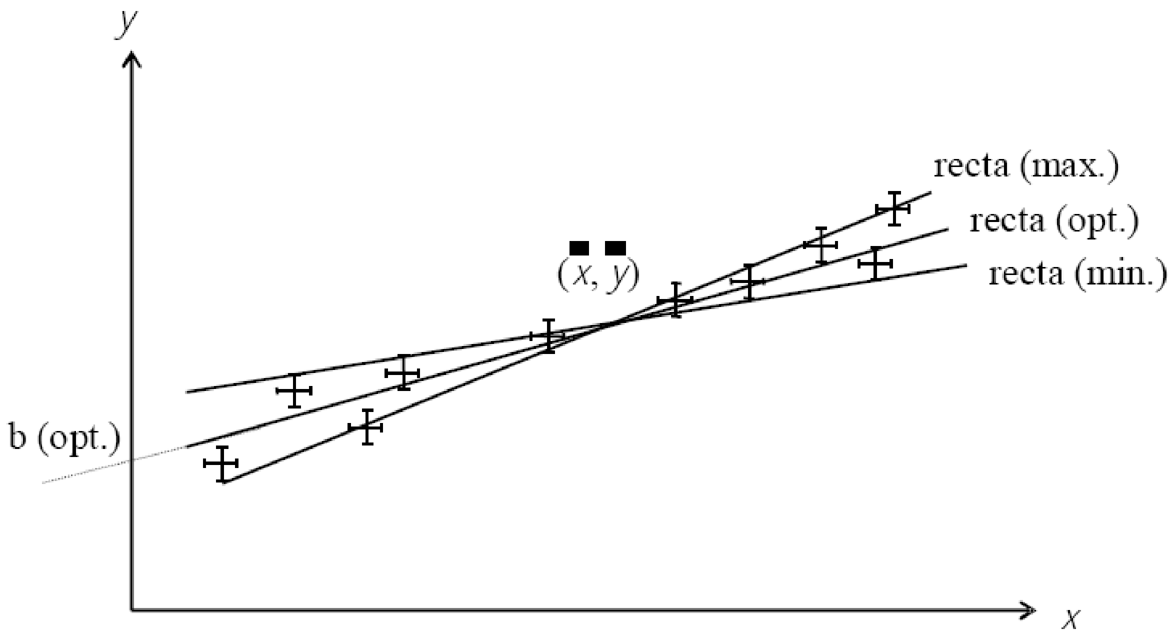


Fig. 6. Recta optima.

Actividades y Preguntas de control

1. Para un objeto con movimiento uniformemente acelerado se hicieron las siguientes mediciones.

$t(s)$	1	2	3	4	5
$v\ (m/s)$	8	11	14	17	20

Tabla 1. Velocidad de un objeto con movimiento uniformemente acelerado.

a. Grafique en sobre papel milimetrado los datos de la tabla 1.
b. Compare la gráfica obtenida, con las estudiadas anteriormente. ¿Con cuál tiene mayor semejanza?
c. ¿La recta pasa por el origen de coordenadas? ¿Qué indica esto?

d. ¿Cuál es la ley que rige el movimiento?

2. Al soltar un objeto en caída libre, se hicieron las mediciones que se indican en la tabla 2. Halle la ley que rige el movimiento.

$t(s)$	1	1.5	2	2.5
$d\ (m)$	4.9	11	19.6	30.6

Tabla 2. Distancia en función del tiempo para un objeto que cae libremente.

a. Grafique en el papel milimetrado los datos de la tabla 2.
b. Compare la curva obtenida con las estudiadas anteriormente. ¿Con cuál tiene mayor semejanza?
c. Según el tipo de función, ¿puede obtener una línea recta? ¿Cómo lo haría? Explique.
d. Si su respuesta es si, encuentre la pendiente de la recta.
e. Sustituya los valores encontrados en la ecuación correspondiente y encuentre la ley que rige el movimiento.

3. Se tiene con una cierta cantidad del elemento químico polonio. Después de 138 días permanecerá solamente la mitad de la misma. Con esta información obtenga la ley que rige el fenómeno. ¿Qué cantidad de polonio quedará después de un año? Proceda a obtener los datos para graficar la tabla 3. Tabla 3. Porcentaje de Polonio en función del tiempo.

$t\ (días)$	0	138	276	414
P (%)	100	50	25	12.5

Tabla 3. Porcentaje de polonio en función del tiempo

a. Grafique en papel milimetrado el porcentaje p en función del tiempo t.
b. Analizando la curva trate de contestar las siguientes preguntas:
- La relación funcional entre las variables es: Lineal, Potencial ó exponencial. ¿por qué?

c. Compare la gráfica obtenida, con las estudiadas anteriormente. ¿Con cuál de ellas tiene mayor semejanza?
d. Según el tipo de función, ¿Se puede obtener una línea recta? ¿Cómo lo harías? Si su respuesta es sí, encuentre la pendiente de la recta.
e. Sustituya los valores encontrados en la ecuación correspondiente y encuentre la ley que rige el fenómeno.

.