Curso de Electromagnetismo

CAPITULO IV - Potencial electrostático y energía

IV.1

Nombre: Código:

1 Una esfera conductora maciza de radio R tiene una carga Q en su superficie; la esfera es concéntrica a un cascarón esférico grueso, más grande, con radio interno R_1, radio externo R_2 y carga neta -Q. Determínese el potencial electrostático para
a) $r \geq R_2$, b) $R_1 \leq r \leq R_2$, c) $R \leq r \leq R_1$ y d) $r \leq R$.

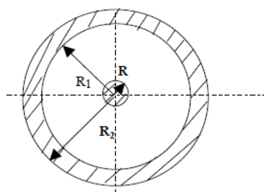
a)

$0 < r < R,\ E_1 = 0.$

$R < r < R_1,\ E_2 = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

$R_1 < r < R_2,\ E_3 = 0.$

$r > R_2,\ E_4 = 0$



Use the electric fields above to find electric potential

using: $V(r) = -\int_{\text{reference point}}^{r} \vec{E}\cdot d\vec{r}$

(a) $r > R_2,\ V_a = 0$

(b) $R_1 < r < R_2,\ V_b = \text{constant} = V_a(r = R_2) = 0$

(c) $R < r < R_1.\ V_c = -\int_{\infty}^{R_2} 0dr - \int_{R_2}^{R} 0dr - \int_{R_1}^{r} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,dr = \underline{\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_1} - \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}}$

(d) $0 < r < R,\ V_d = \text{constant} = V_c(r = R) = \underline{\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_1} - \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}}$

2 Una varilla larga y delgada de metal, de radio a, tiene la carga de λ coulombs por unidad de longitud, distribuida uniformemente en su superficie. La varilla está rodeada por un cilindro concéntrico de lámina metálica de radio b, con una carga de -λ coulombs por unidad de longitud en su superficie interior.
a) ¿Cuál es la densidad de energía (en función del radio) en el espacio entre la varilla y el cilindro?
b) ¿Cuál es la energía eléctrica total por unidad de longitud?

a)

Electric field in the cylinder is (by Gauss' Law)

(i) $r < a,\quad 2\pi r l\, E(r) = \dfrac{Q_{net}}{\varepsilon_0} = \dfrac{\lambda l}{\varepsilon_0}\dfrac{\pi r^2}{\pi a^2} = \dfrac{\lambda l r^2}{\varepsilon_0 a^2}$

Therefore, $E(r) = \dfrac{\lambda l r^2}{2\pi\varepsilon_0 r l} = \dfrac{\lambda r}{2\pi\varepsilon_0 a^2}$

(ii) Between the rod and the cylinder,

$a < r < b \quad E(r) = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r}$

(a) Therefore, between the rod and the cylinder,

$u = \dfrac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = \dfrac{1}{2}\varepsilon_0\left(\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r}\right)^2 = \underline{\dfrac{\lambda^2}{8\pi^2\varepsilon_0 r^2}}$

(b) Inside the cylinder, the energy per unit length is:

$u = \dfrac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = \dfrac{1}{2}\varepsilon_0\left(\dfrac{\lambda r}{2\pi\varepsilon_0 a^2}\right)^2 = \underline{\dfrac{\lambda^2 r^2}{8\pi^2\varepsilon_0 a^4}}$

Total energy of the system is in length l is:

$U = \int u dv = \int_{r=0}^{r=a} \dfrac{\lambda^2 r^2}{8\pi^2\varepsilon_0 a^4} dV + \int_{r=a}^{r=b} \dfrac{\lambda^2}{8\pi^2\varepsilon_0 r^2} dV$

where U is energy in cylinder in length l. Take volume elements to be concentric cylindrical shells of volume $2\pi r l\, dr$. Therefore,

$U = \int_0^a \dfrac{\lambda^2 r^2}{8\pi^2\varepsilon_0 a^4} 2\pi r l\, dr + \int_a^b \dfrac{\lambda^2}{8\pi^2\varepsilon_0 r^2} 2\pi r l\, dr$

$= \dfrac{l\lambda^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\int_0^a \dfrac{r^3 dr}{a^4} + \int_a^b \dfrac{dr}{r}\right) = \dfrac{l\lambda^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{4} + \ln\dfrac{b}{a}\right)$

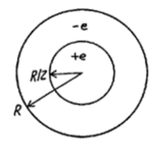
Therefore, energy per unit length $U' = U/l = \dfrac{\lambda^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{4} + \ln\dfrac{b}{a}\right)$

3 Usese el modelo descrito en el problema 36 del capítulo 24 , de la distribución de carga en un neutrón. ¿Cuál es el resultado en eV?

FIGURA 24.36 Distribución hipotética de cargas dentro de un neutrón.

a)

$R = 1 \times 10^{-15}$ m, $\mu = \dfrac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$



when $U = U = \int u\ dv = \int \dfrac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 (4\pi r^2 dr)$

For $r \leq R/2$, from Example 24.4,

$U_1 = \dfrac{2e^2}{8\pi\varepsilon_0 5R}$

For $r \geq R$, $E = 0$; $U = 0$

$\dfrac{R}{2} \leq r \leq R\ (4\pi) r^2 E = \dfrac{e}{\varepsilon_0}\left(1 - \dfrac{\dfrac{r^3 - R^3}{8}}{\dfrac{R^3 - R^3}{8}}\right)$

b)

$$E = \frac{2e}{7\pi\varepsilon_0 r^2 R^3}(R^3 - r^3)$$

$$\frac{R}{2} \leq r \leq R;$$

$$U_2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_{R/2}^{R} \frac{4e^2}{(7\pi\varepsilon_0 R^3)^2}\frac{1}{r^4}(R^3 - r^3)^2 (4\pi r^2)\, dr$$

$$= \frac{8e^2}{49\pi\varepsilon_0 R^6}\int\left(\frac{R^6}{r^2} - 2rR^3 + r^4\right)dr$$

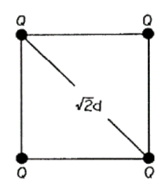
After simplification, $U = U_1 + U_2 = \dfrac{0.98e^2}{8\pi\varepsilon_0 R} = \underline{7.1 \times (10^5)\,\text{eV}}$

4 Cuatro cargas positivas iguales de magnitud Q se colocan en las cuatro esquinas de un cuadrado de lado d. ¿Cuál es la energía eléctrica de este sistema de cargas?

a)

$U = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{4Q^2}{d} + 2\dfrac{Q^2}{\sqrt{2}d}\right)$

$= \underline{\dfrac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 d}(4 + \sqrt{2})}$



5 Se puede colocar una carga de 7.5×10^{-6} C en una esfera metálica de 15 cm de radio, sin que el aire que la rodea sufra rompimiento eléctrico. ¿Cuál es la energía eléctrica de la esfera con esa carga?

a)

As in Example 1, $U = \dfrac{1}{2}QV = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q^2}{R} = \dfrac{1}{2}(9.0 \times 10^9)\dfrac{(7.5 \times 10^{-6})^2}{0.15}\text{J} = \underline{1.7\text{ J}}$

6 En el problema 71 se integró la energía potencial de las cargas en una esfera con carga uniforme, y se encontró que el potencial eléctrico es $(1/4\pi\varepsilon_0)\frac{3}{5}Q^2/r$. Obténgase este resultado integrando la densidad de energía y $1/2\varepsilon_0 E^2$ del campo eléctrico de la esfera. (Sugerencia: Debe hacerse la integración en el interior y el exterior de la esfera, porque existe campo eléctrico tanto en un lado como en el otro.)

a)

Use the electric fields found in Problem 71:

$$E(r \le R) = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}, \text{ where } \rho = \frac{3Q}{4\pi R^3}$$

$$E(r \ge R) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$\Rightarrow U = \frac{\varepsilon_0}{2}\left[\int_0^R |E(r \le R)|^2\, 4\pi r^2 dr + \int_R^\infty |E(r \ge R)|^2\, 4\pi r^2 dr\right]$$

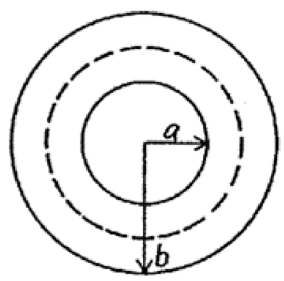
$$= \frac{\varepsilon_0}{2}\left[\frac{4\pi\rho^2}{9\varepsilon_0{}^2}\int_0^R r^4 dr + \frac{4\pi Q^2}{16\pi^2\varepsilon_0{}^2}\int_R^\infty \frac{dr}{r^2}\right]$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2}\left[\frac{4\pi\rho^2}{9\varepsilon_0{}^2}\frac{R^5}{5} + \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0{}^2 R}\right]$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2}\left[\frac{Q^2}{20\pi\varepsilon_0{}^2 R} + \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0{}^2 R}\right] = \underline{\frac{3Q^2}{20\pi\varepsilon_0 R}}$$

7 Un tubo de plástico largo tiene radio interior a y radio exterior b. E n el volumen entre a ≤ r ≤ b ¿se distribuye carga uniformemente. La carga es λ coulombs por metro del tubo. Determínese la diferencia de potencial entre r = b y r = 0. Supóngase que el plástico no influye sobre el campo eléctrico

a)



There is no electric field in cavity.
Therefore, $V(a) - V(0) = 0$
By Gauss' Law, E-field for
$a < r < b$ given by

$$E(2\pi r e) = \lambda\left(\frac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2}\right)\frac{e}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\left(\frac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2}\right)$$

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0(b^2 - a^2)}\left(r - \frac{a^2}{r}\right)$$

$$V(b) - V(a) = -\int_a^b E(r)\,dr = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0(b^2 - a^2)}\left(\frac{r^2}{r} - a^2 enr\right)_b^a$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0(b^2 - a^2)}\frac{a^2 + b^2}{2} + a^2\ln\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left[\frac{a^2 en(b/a)}{b^2 - a^2} - \frac{1}{2}\right]$$

$\underline{V(b)V(0)}$ [since $V(a) = V(0)$]

8 El potencial, en una región del espacio, es V = cos (2πx/ a) X eos(2πy/b) X eos(2πz/c), siendo a ,b y c constantes. ¿Cuáles son los componentes x, y y z del campo eléctrico en esta región?

a)

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = \underline{-\frac{2\pi}{a}\sin\frac{2\pi x}{a}\cos\frac{2\pi y}{b}\cos\frac{2\pi z}{c}}$$

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = \underline{-\frac{2\pi}{b}\cos\frac{2\pi x}{a}\sin\frac{2\pi y}{b}\cos\frac{2\pi z}{c}}$$

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = \underline{-\frac{2\pi}{c}\cos\frac{2\pi x}{a}\cos\frac{2\pi y}{b}\sin\frac{2\pi z}{c}}$$